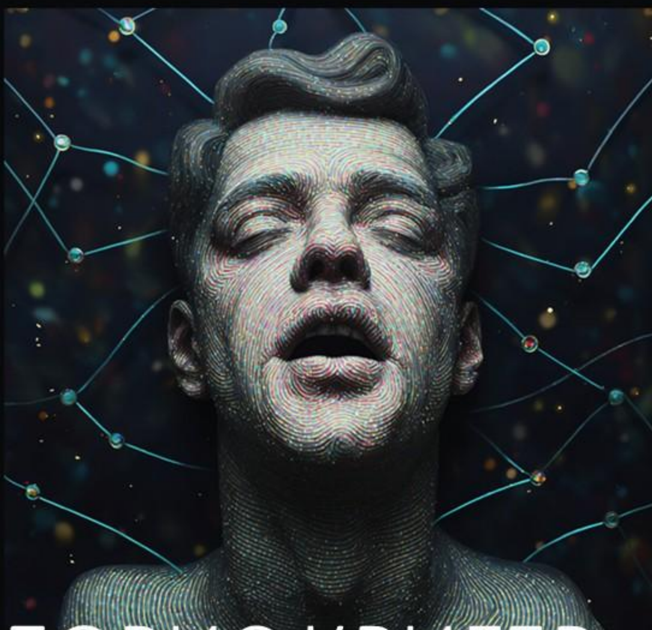
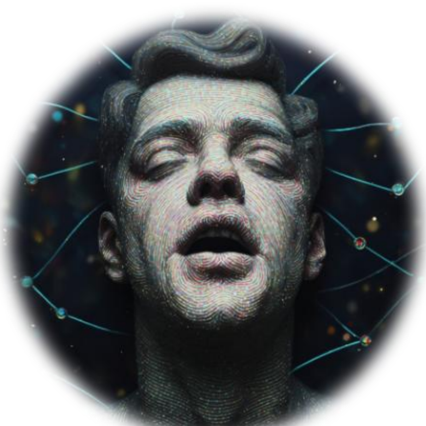
ПОЧЕМУ МАТЕМАТИКА РАБОТАЕТ



БОРИС КРИГЕР

БОРИС КРИГЕР

ПОЧЕМУ МАТЕМАТИКА РАБОТАЕТ



ALTASPERA

Опубликовано издательством Altaspera Publishing .

Борис Кригер — междисциплинарный философ, исследующий, каким образом разрозненные области знания могут быть соединены в целостное понимание человеческого существования. В своих работах он стремится преодолеть разрыв между философией и наукой, этикой и политикой, индивидуальным опытом и коллективными структурами. Соединяя идеи экзистенциализма, социальной теории, когнитивной науки и исследований технологий, он формирует способ мышления, который не является ни редукционистским, ни утопическим, а остаётся открытым сложности современного мира.

Почему математика работает

Почему математика — творение человеческого разума — описывает физический мир с такой необычайной точностью? Почему уравнения, изобретенные для одной цели, спустя десятилетия или столетия оказываются идеальным языком для совершенно другой области природы? В 1960 году лауреат Нобелевской премии Юджин Вигнер назвал это соответствие «даром, который мы не понимаем и не заслуживаем». Этот вопрос с тех пор не дает покоя науке.

В этой книге Борис Кригер предлагает ответ, одновременно простой и глубокий: математика описывает мир, потому что выживает только то, что имеет математическую структуру. Вселенная — это поток изменений, но в этом потоке некоторые вещи остаются неизменными — атомы , звезды, организмы, законы. Выживать — значит обладать сохраняющимися величинами и инвариантными отношениями. Эти инварианты, согласно глубинной логике алгебры, неизбежно образуют математические структуры. Поэтому соответствие между математикой и физическим миром — это не чудо, а теорема: неизбежный признак устойчивости.

Построив единую непрерывную аргументацию на протяжении двадцати четырех глав, Кригер прослеживает последствия этого открытия от фундаментальной физики до биологии, от искривления пространства-времени до хрупкости социальных институтов. Он объясняет, почему работает дифференциальное и интегральное исчисление, почему квантовая механика требует комплексных чисел, почему законы физики принимают форму вариационных принципов и почему математическая точность снижается по мере перехода от физики через биологию к социальным наукам. Он противостоит радикальной кантовской альтернативе — что математика является сеткой, проецируемой разумом, а не зеркалом мира, — и показывает, что хотя разум и вносит вклад в математический характер физики, мир вносит больший вклад.

Написанная без единого математического символа, эта книга делает строгую научную аргументацию доступной для любого читателя, готового внимательно задуматься над глубочайшими вопросами: Почему существует порядок ? Почему мир понятен? И почему абстрактный язык закономерностей и структур описывает вселенную, которая вообще не должна была быть описываемой?

Полный текст научной статьи, включая формальные определения, теоремы и доказательства, приведён в качестве приложения.

Ключевые слова

устойчивость, математика, физика, структура, симметрия , инвариантность, реальность

Содержание

Предисловие: Дар, который мы ни понимаем, ни заслуживаем

В жизни каждого учёного наступает момент — иногда в начале, иногда в конце, — когда инструменты перестают казаться инструментами и начинают восприниматься как нечто более странное. Физик записывает уравнение, описывающее траекторию брошенного камня, и обнаруживает, что то же самое уравнение, без изменений, описывает орбиту планеты. Биолог заимствует формулу из термодинамики для моделирования потока энергии в экосистеме, и она подходит. Математик, работая в полной изоляции от всего физического, изобретает структуру чистой мысли — скажем, геометрию искривлённых поверхностей или алгебру мнимых чисел, — и спустя десятилетия физик обнаруживает, что эта изобретённая структура является точным языком, который природа использует для самоорганизации на самом глубоком уровне.

Почему?

Этот вопрос не давал покоя Евгению Вигнеру, венгерскому лауреату Нобелевской премии, когда в 1960 году он сел писать эссе, которое с тех пор не дает покоя философии науки. Он назвал его «Необоснованная эффективность математики в естественных науках», и его тезис был обезоруживающе прост: соответствие между абстрактными структурами математики и конкретными структурами физического мира настолько точное, настолько далеко идущее и настолько устойчивое, что требует объяснения — а объяснения ни у кого нет.

Вигнер не преувеличивал. Комплексные числа, изобретенные в шестнадцатом веке для решения загадки кубических уравнений, спустя триста лет оказались незаменимым языком квантовой механики. Риманова геометрия, разработанная Бернхардом Риманом в 1854 году как чисто интеллектуальное упражнение по представлению искривленных пространств, шестьдесят лет спустя стала основой общей теории относительности Эйнштейна. Теория групп, зародившаяся в результате исследования молодого француза о том, какие полиномиальные уравнения можно решить с помощью радикалов, теперь обеспечивает фундаментальную основу для Стандартной модели физики элементарных частиц — нашего наиболее глубокого понимания сил и частиц, составляющих материю.

Это не единичные совпадения. Они образуют закономерность, и эта закономерность усиливается по мере углубления науки. Чем точнее мы исследуем Вселенную, тем точнее математика описывает то, что мы обнаруживаем. Предсказание существования позитрона — антиматериального двойника электрона — было получено не в результате эксперимента, а из знака минус в уравнении. Существование бозона Хиггса было предсказано математической структурой за десятилетия до того, как какой-либо коллайдер стал достаточно мощным, чтобы его создать. Искривление света под действием гравитации, квантованные энергетические уровни атомов, точное значение магнитного момента электрона с точностью до двенадцати знаков после запятой — все это было предсказано математикой, а затем подтверждено наблюдениями.

Вигнер назвал эту переписку «даром, который мы ни понимаем, ни заслуживаем». Он не предложил никакого решения. Он просто обозначил загадку и оставил её открытой, как дверь в комнату, которую ещё никто полностью не исследовал.

Эта книга — попытка пройти сквозь эту дверь.

Предлагаемый ответ не в том, что Вселенная тайно состоит из математики, хотя некоторые и утверждали обратное. И не в том, что математика — это всего лишь человеческое изобретение, которое мы проецируем на мир, хотя и в этом есть доля правды. Ответ одновременно проще и удивительнее: математика описывает мир, потому что мир состоит из вещей, которые существуют вечно, а вечность, как оказалось, имеет структуру. Эта структура математична, не по выбору или совпадению, а по необходимости.

Представьте себе это так. Вселенная — это поток перемен. Частицы сталкиваются, звезды загораются и коллапсируют, виды эволюционируют и вымирают, цивилизации возникают и рушатся. В этом потоке некоторые вещи остаются неизменными. Атом золота существует миллиарды лет. Атом водорода существует с первых минут после Большого взрыва. Сами законы физики — правила, которые управляют тем, что меняется, а что нет, — существуют, насколько нам известно, с начала времен.

Что нужно, чтобы выстоять? Этот вопрос лежит в основе данной книги. И ответ, разработанный со всей формальной строгостью в научной статье, включенной в конец этого тома (Кригер, 2026, doi:10.5281/zenodo.XXXXX), заключается в том, что для выживания необходима инвариантность. Чтобы выстоять в потоке изменений, система должна обладать величинами или отношениями, которые не меняются — сохраняющимися величинами, симметриями, структурными закономерностями, которые сохраняются после преобразований, которым подвергается система.

Вот ключевое понимание: эти инвариантные величины не существуют изолированно. Они связаны друг с другом алгебраическими соотношениями — их можно складывать, умножать, комбинировать. Они образуют структуру. И эта структура, согласно глубинной логике самой математики, всегда является моделью некоторой формальной математической теории. Поэтому соответствие между физическим миром и математикой — это не чудо, а теорема.

Это то, что мы называем тезисом о фильтре персистентности. Вселенная не является математической, потому что какой-то космический создатель написал её на языке математики. Она математична, потому что выживает только математическое. Конфигурации материи и энергии, лишённые необходимой структурной регулярности — той, которая допускает математическое описание, — не сохраняются. Они растворяются, рассеиваются, распадаются. То, что остаётся, что сохраняется, то, что мы наблюдаем, изучаем и на чём строим нашу науку, — это именно тот набор вещей, структура которых достаточно богата, чтобы быть описанной математикой. Мы не открываем заранее установленную гармонию между разумом и космосом. Мы наблюдаем за теми, кто выжил после фильтра, и критерием этого фильтра является математическая структура.

Последствия этой идеи выходят далеко за рамки физики. Если устойчивость является ключом к математической описываемости , то любая область, в которой вещи сохраняются — биология , экономика, психология, социальная жизнь — должна демонстрировать математическую структуру пропорционально степени этой устойчивости. И это так. Математика биологии реальна, но приблизительна: организмы сохраняются, но несовершенно, и их математические описания, соответственно, неточны. Математика социологии еще слабее: социальные институты сохраняются, но хрупки , и их математические модели, соответственно, грубы. Точность математического описания соответствует точности устойчивости, и это соответствие само по себе является предсказанием тезиса.

Но книга на этом не останавливается. Она рассматривает наиболее радикальную альтернативу фильтру персистентности: возможность, впервые выдвинутую Иммануилом Кантом, что математическая структура, которую мы находим в мире, — это вовсе не свойство мира, а свойство разума, который его воспринимает. Возможно, математика — это не зеркало, поднесенное к природе, а очки, через которые мы неизбежно видим природу как математику — подобно тому, как трехмерность цвета — это не свойство света, а свойство трех типов конусовидных клеток в наших глазах.

Эта контртезисная точка зрения воспринимается всерьез — формально разрабатывается, строго защищается — а затем опровергается. Опровержение основывается на четырех независимых аргументах, самым убедительным из которых является аргумент от избыточности предсказаний: если бы математика была всего лишь когнитивной сеткой, она не смогла бы систематически генерировать правильные предсказания о явлениях, никогда ранее не наблюдавшихся. Тем не менее, она делает это снова и снова — от позитрона до гравитационных волн и бозона Хиггса. Чисто когнитивная сетка не может объяснить, почему наши внутренние проекции постоянно оказываются верными в отношении внешнего мира, с которым мы никогда раньше не сталкивались.

В результате получается синтез: математика в том виде, в котором мы её практикуем, является продуктом связи между структурой разума и структурой мира. Некоторые из того, что мы называем математической физикой — использование непрерывных переменных, язык дифференциальных уравнений, предположение о гладкости — действительно могут отражать особенности человеческого познания, а не особенности реальности. Но конкретное содержание физики — какие группы симметрии, какие законы сохранения, какие константы связи — определяется миром, а не нами. На мир действует фильтр персистентности; то, что проходит через него, преломляется разумом, прежде чем мы сможем это воспринять.

Аргументация этой книги подробно и формально изложена в прилагаемой к ней научной статье, которая служит приложением. Статья содержит определения, теоремы и доказательства, которые делают аргументацию строгой. В этой книге эти идеи переводятся в слова, метафоры и истории — не потому, что математика несущественна, а потому, что эти идеи заслуживают того, чтобы быть доступными любому, кто готов внимательно задуматься о том, почему Вселенная устроена именно так, как она есть.

На следующих страницах нет математических символов. Каждая идея выражена на обычном языке. Но сами идеи не являются обычными. Они затрагивают некоторые из самых глубоких вопросов, которые когда-либо задавало человечество: почему существует порядок , а не хаос? Почему мир понятен? Почему абстрактный язык закономерностей и структур — изобретенный разумом, эволюционировавшим для поиска плодов и избегания хищников, — описывает поведение кварков, черных дыр и самого расширения пространства?

В этой книге утверждается, что понятность — это не бонус, а плата за вход. Только понятное сохраняется, и только то, что сохраняется, можно постичь.

Добро пожаловать в фильтр.

Глава 1. Неразумный вопрос

Весной 1960 года тихий и скромный физик Юджин Вигнер выступил перед аудиторией в Нью-Йоркском университете и задал вопрос настолько простой , что он каким-то образом ускользал от пристального внимания на протяжении трех столетий. Вигнер не был провокатором. Он был лауреатом Нобелевской премии, человеком с четкими привычками и тщательно продуманными формулировками, известным своими работами по квантовой механике, которые были столь же элегантны, сколь и глубоки. Вопрос, который он задал в тот день, касался не какого-либо конкретного уравнения или эксперимента. Он касался их всех.

Почему работает математика?

Вопрос звучит почти наивно, как вопрос о том, почему молоток забивает гвозди. Математика — это инструмент, а инструменты работают, потому что мы их для этого и создали . Но мысль Вигнера была более тонкой и тревожной. Молоток предназначен для забивания гвоздей. Математика во многих своих наиболее мощных приложениях вообще не была предназначена для описания физического мира. Она была разработана по внутренним причинам — для решения загадок, удовлетворения любопытства, стремления к красоте и логической полноте — а затем, иногда спустя десятилетия или столетия, она оказалась идеальным языком для физической теории, которую её создатели никогда не могли себе представить.

Рассмотрим комплексные числа. В XVI веке итальянские алгебраисты столкнулись с ними как с нежелательными гостями при решении кубических уравнений — странными выражениями, содержащими квадратный корень из минус единицы, которые не имели очевидного смысла и какой-либо видимой связи с чем-либо реальным. Математики терпели их как полезные фикции , инструменты учета, упрощающие определенные вычисления. Триста лет спустя комплексные числа оказались не просто полезными, но и незаменимыми для квантовой механики — самой точной и успешной физической теории из когда-либо созданных. Волновая функция, описывающая каждую частицу во Вселенной, является комплекснозначной функцией. Без квадратного корня из минус единицы квантовая механика даже не может быть сформулирована.

Или рассмотрим риманову геометрию. В 1854 году немецкий математик Бернхард Риман, едва достигший тридцати лет и защищавший свою хабилитацию перед престарелым Гауссом, изложил общую теорию искривленных пространств в любом количестве измерений. Риман не имел в виду никакого физического применения. Он исследовал логические возможности геометрии, задаваясь вопросом, что произойдет, если отказаться от предположения о плоской форме пространства. Его работа была чистой математикой, мотивированной чистым любопытством. Шестьдесят лет спустя Эйнштейн обнаружил, что искривленные пространства Римана — это не математическая фантазия, а реальная геометрия Вселенной. Гравитация — это не сила, притягивающая массы друг к другу; это искривление пространства-времени, и язык этого искривления — риманова геометрия — язык, который ждал Эйнштейна в готовом виде, когда он ему понадобился.

Или рассмотрим теорию групп — математическое исследование симметрии. Она началась с Эвариста Галуа, французского вундеркинга, который за несколько лет до своей смерти на дуэли в возрасте двадцати лет разработал теорию, связывающую разрешимость полиномиальных уравнений со свойствами симметрии их корней. Галуа думал об алгебре, а не об атомах. Тем не менее, теория групп, которую он заложил, теперь обеспечивает фундаментальную основу для Стандартной модели физики элементарных частиц . Кварки, из которых состоят протоны и нейтроны, силы, которые их связывают, закономерности масс частиц и взаимодействий — все это организовано группами симметрии, которые Галуа не мог себе представить, используя созданный им самим механизм.

Вигнер собрал подобные примеры — не один или два, а систематическую закономерность, охватывающую всю историю современной науки, — и задался вопросом: что происходит? Почему структуры, изобретенные математиками для собственных целей, постоянно описывают физический мир? Почему Вселенная, кажется, говорит на языке, который во многих случаях был предназначен для совершенно других разговоров?

Он рассмотрел очевидные объяснения и счёл их несостоятельными. Возможно, математика работает потому, что мы создали её для описания мира. Но это не может объяснить случаи, когда математика появилась первой — когда абстрактная структура была изобретена исключительно по внутренним причинам и лишь позже нашла своё физическое применение. Риман не пытался описать гравитацию. Галуа не пытался описать кварки. Комплексные числа не были изобретены для квантовой механики.

Возможно, математика работает благодаря эффекту селективного отбора — мы помним успехи и забываем неудачи. В этом, безусловно, есть доля правды. На каждую математическую структуру, находящую физическое применение, приходятся сотни тех, которые его не находят. Но эффект селективного отбора не может объяснить глубину успешных применений. Когда математическая структура работает в физике, она работает не приблизительно или в ограниченной области. Она работает с поразительной точностью в широком диапазоне явлений. Те же уравнения, которые описывают поведение электрона в лаборатории, описывают поведение электронов в далеких галактиках. Точность соответствия между теорией и экспериментом в лучших случаях достигает частей на миллиард. Это не тот успех, который переживает дефляцию эффекта селективного отбора.

Возможно, математика работает потому, что эволюция сформировала наш мозг таким образом, чтобы он отслеживал закономерности физического мира. Мы эволюционировали в мире, управляемом физическими законами, поэтому естественный отбор наделил нас математическими интуициями — чувством числа, ощущением пространства, способностью распознавать закономерности — которые соответствуют этим законам. Это правдоподобно для грубой математики повседневной жизни: оценки расстояний, подсчета хищников, прогнозирования траекторий. Но это не может объяснить, почему те же математические структуры, которые описывают метание камней, также описывают поведение нейтронных звезд, искривление пространства-времени и квантовую запутанность частиц. Наши предки никогда не сталкивались с нейтронными звездами. У естественного отбора не было причин наделять нас интуицией о гильбертовом пространстве.

Вывод Вигнера поразил своей честностью. Он назвал эффективность математики «даром, который мы не понимаем и не заслуживаем», и оставил вопрос открытым. Это эссе более шестидесяти лет будоражит философию науки, породив литературу , охватывающую математику, физику, философию, когнитивную науку и основы логики. И все же консенсуса так и не выработалось. Вопрос остается открытым, или, по крайней мере, так казалось, до сих пор.

Эта книга предлагает ответ. Это не тот ответ, который растворяет тайну в тривиальности — вопрос слишком глубок для этого. Но это ответ, который превращает тайну из смутного чувства удивления в точное структурное утверждение, которое можно исследовать, проверить и потенциально опровергнуть. Ответ начинается не с математики, а с чего-то более фундаментального: простого, повсеместного и недооцененного факта, что некоторые вещи непреходящи.

Вселенная — это поток перемен. Всё движется, трансформируется, распадается. Но в этом потоке есть островки стабильности — атомы, звёзды, организмы, кристаллы, институты, законы природы. Именно они сохраняются. И эта стабильность, как покажут следующие главы, не является пассивным состоянием. Это достижение, которое накладывает определённые структурные требования на всё, что его совершает. Эти требования, как выясняется, имеют математическую природу.

Это тезис о фильтре персистентности, и он является предметом данной книги. Формальный аргумент со всеми его определениями и доказательствами представлен в научной статье, включенной в качестве приложения в конце этого тома (Кригер, 2026, doi:10.5281/ zenodo.XXXXX). Здесь же аргумент изложен словами.

Глава 2. Что значит выстоять

Прежде чем объяснить, почему математика описывает мир, нам нужно понять, о каком мире мы говорим. Не о мире субатомных частиц или далёких галактик — об этом мы поговорим позже, — а о мире, каким он предстаёт перед любым наблюдателем, где бы он ни находился: мире вещей, которые меняются, и вещей, которые остаются неизменными.

Река течёт. Её вода никогда не бывает одинаковой от одного мгновения к другому — каждая молекула находится в движении, прибывая сверху и убывая снизу. И всё же река существует. У неё есть форма, русло, характер, которые сохраняются благодаря непрерывному обновлению её частей. Река — это не её вода. Это тот узор, которому следует вода.

Пламя горит. Атомы в пламени заменяются тысячи раз в секунду по мере сгорания топлива и рассеивания продуктов сгорания. Однако пламя имеет форму, температуру, цвет . Оно существует как процесс, а не как совокупность материи. Пламя — это не его атомы. Это динамический паттерн, который эти атомы воплощают.

Живой организм дышит, ест, выделяет. В течение человеческой жизни почти каждый атом в организме заменяется — некоторые в течение нескольких дней, другие в течение нескольких лет, но почти ни один из них не является тем же самым атомом, который присутствовал при рождении. И все же человек продолжает существовать. Существует преемственность структуры, функций, идентичности, которая сохраняется после полной замены материальной основы.

Все это примеры устойчивости, и у них есть общая черта: что-то остается неизменным, в то время как все остальное меняется. В реке неизменным остается характер течения — форма русла, профиль скорости, соотношение между давлением выше по течению и расходом ниже по течению. В пламени неизменным остается режим горения — температура, скорость расхода топлива, геометрия зоны реакции. В организме неизменным остается сеть гомеостатических взаимосвязей — температура тела, колеблющаяся около 37 градусов, pH крови около 7,4, уровень глюкозы в узком диапазоне.

На языке науки эти неизменные свойства называются инвариантами. Инвариант — это любая величина, свойство или отношение, которые не изменяются при преобразованиях, которым подвергается система. Форма реки не меняется по мере того, как по ней течет вода. Температура пламени не меняется по мере замены атомов. Температура тела организма не меняется с изменением сезонов и приемом пищи.

Инварианты не являются чем-то экзотическим или редким. Они повсюду, на всех масштабах природного мира. В физике наиболее известными инвариантами являются сохраняющиеся величины: энергия, импульс, угловой момент, электрический заряд. Это величины, которые остаются постоянными по мере эволюции физической системы во времени. Независимо от сложности взаимодействий, независимо от количества участвующих частиц, полная энергия изолированной системы не меняется. Полный импульс не меняется. Полный заряд не меняется . Эти законы сохранения являются одними из самых глубоких и точных закономерностей во всей науке.

Однако инварианты не ограничиваются физикой. Вид, сохраняющий свои характеристики на протяжении эволюционного времени, поддерживает определенные инвариантные параметры — базовое строение тела, метаболическую стратегию, способ размножения — при этом допуская вариации в других параметрах. Язык, сохраняющий свои характеристики на протяжении веков, сохраняет инвариантные грамматические структуры, в то время как его словарный запас меняется. Правовая система, пережившая политические потрясения, сохраняет инвариантные процессуальные нормы, в то время как конкретные законы изменяются и переписываются.

Таким образом, понятие устойчивости не ограничивается физической выносливостью. Оно применимо ко всему, что сохраняет свою идентичность в процессе изменений. И ключ к этой идентичности всегда один и тот же: существование инвариантов. Без чего-то неизменного нет «вещи», которая сохраняется — есть лишь последовательность несвязанных состояний, последовательность без непрерывности, река без русла.

Это наблюдение — настолько простое, что рискует показаться тривиальным — лежит в основе всего последующего. Устойчивость означает наличие инвариантов. Нет инвариантов — нет устойчивости. Это не эмпирическое открытие. Это логическая истина, следствие значения слова «устойчивость». Если абсолютно ничего в системе не остается неизменным от одного момента к другому, то система не существует. Она разрушена и заменена чем-то новым.

Однако у этого наблюдения есть и обратная сторона, далеко не тривиальная: если система существует, то она должна обладать инвариантами. И эти инварианты, как мы увидим в следующей главе, не являются бесформенными сгустками постоянства. Они обладают структурой. Они связаны друг с другом определенными, закономерными способами. И эта структура является мостом между физическим миром и абстрактным миром математики.

Здесь есть один нюанс, заслуживающий внимания. Когда мы говорим, что система «сохраняется», мы не имеем в виду, что она вечна или неизменна. Мы имеем в виду, что она сохраняет определенные характеристики в пределах определенных допусков в течение определенного времени. Мыльный пузырь существует несколько секунд. Атом урана существует миллиарды лет. Протон может существовать вечно, а может в конечном итоге распасться — мы не знаем. Степень сохранения сильно варьируется, но логическая структура остается той же: сохранение требует инвариантов, и чем точнее поддерживаются инварианты, тем точнее система сохраняется.

Эта градация окажется важной. Она объясняет, почему математика работает с необычайной точностью в фундаментальной физике, где сохраняющиеся величины являются точными и вечными, и с постепенно уменьшающейся точностью в химии, биологии и социальных науках, где соответствующие инварианты являются приблизительными и ненадежными. Точность математического описания соответствует точности сохранения. Это не недостаток теории, а одно из ее центральных предсказаний.

Древнегреческие философы интуитивно понимали нечто подобное. Платон различал мир вечных Форм — совершенных, неизменных, доступных только разуму, —

от мира становления, где вещи рождаются, меняются и исчезают. Формы были инвариантами платоновской метафизики, неизменными реальностями, стоящими за потоком явлений. Современная теория устойчивых систем в некотором смысле является научным потомком прозрения Платона: инварианты реальны, они имеют структуру и являются ключом к пониманию того, почему мир познаваем. Но в отличие от Платона, нам не нужно постулировать отдельную область Форм. Инварианты находятся здесь, в этом мире, встроенные в динамику систем, которые сохраняются.

Теперь мы готовы к следующему шагу: посмотреть, что произойдет, если мы будем исследовать инварианты устойчивой системы не по одному, а все вместе.

Глава 3. Инварианты внутри

В устойчивой системе есть инварианты. Это мы установили в предыдущей главе. Но мы оставили открытым вопрос: что же такое инвариант ? Это просто число — температура, заряд, энергия — которое случайно не меняется? Или в этом есть нечто большее?

Ответ заключается в том, что всё гораздо сложнее. Инварианты не существуют изолированно. Они связаны друг с другом отношениями, которые сами по себе инвариантны, — и эти отношения обладают определённой, идентифицируемой и удивительно жёсткой структурой. Понимание этой структуры является ключевым шагом в аргументации этой книги, поскольку именно эта структура преодолевает разрыв между физическим миром и миром математики.

Начнём с простейшего случая. Предположим, что физическая система обладает двумя сохраняющимися величинами — назовём их энергией и импульсом, поскольку они наиболее известны. Энергия не изменяется по мере эволюции системы. Импульс не изменяется. Это индивидуальные инварианты, индивидуальные числа, которые остаются неизменными.

Но теперь давайте рассмотрим, что происходит, когда мы их объединяем. Если энергия и импульс сохраняются, то сумма энергии и импульса — хотя у неё может и не быть привычного физического названия — также сохраняется. Величина, которая не изменяется, при сложении с другой величиной, которая не изменяется, даёт величину, которая не изменяется. Это очевидно, почти тривиально, но это начало чего-то глубокого.

Аналогично, если мы умножим энергию на константу — скажем, удвоим её — результат всё равно сохранится. Если энергия не изменяется, то и удвоенная энергия тоже не изменится. И если мы умножим две сохраняющиеся величины, произведение также сохранится. Умножение энергии на импульс не имеет интуитивно понятного физического смысла, но как математическая величина оно инвариантно: если оба множителя постоянны, то и их произведение тоже.

Мы обнаружили, что инварианты устойчивой системы — это не просто набор отдельных чисел. Они образуют замкнутую систему относительно основных арифметических операций. Их можно складывать, вычитать, умножать на константы, умножать друг на друга, и результаты всё равно будут инвариантными. На языке математики это означает, что инварианты образуют алгебру — структурированную совокупность элементов, снабженную операциями, которые никогда не выводят за пределы этой совокупности.

Это факт огромной важности, и стоит остановиться и понять, почему.

Алгебра — это не просто набор чисел. Это система с внутренней логикой. Элементы алгебры связаны друг с другом операциями, которые их соединяют, и эти связи можно изучать, классифицировать и сравнивать со связями в других алгебрах. Алгебра инвариантов физической системы, по сути, является отпечатком пальца — компактным кодированием всего, что структурно стабильно в этой системе.

Рассмотрим аналогию. Куча кирпичей — это не архитектура. Кирпичи не имеют никакой значимой связи друг с другом; это просто груда. Но те же самые кирпичи, уложенные в стену с раствором, образуют структуру — структуру, обладающую свойствами, которыми не обладают отдельные кирпичи (несущая способность, теплоизоляция, эстетические качества). Именно расположение, взаимосвязь между частями превращает груду в здание.

Аналогично, список сохраняющихся величин еще не является математикой. Энергия равна пяти, импульс равен трем, заряд равен единице — это отдельные факты, не более математически интересные, чем пункты в списке покупок. Но алгебра этих величин — сеть взаимосвязей, которая их объединяет, ограничения, которым должны удовлетворять определенные комбинации, тождества, связывающие одну сохраняющуюся величину с другой — это структура. А структура, как мы увидим, и есть суть математики.

Ограничения особенно важны. В типичной физической системе сохраняющиеся величины не все независимы. Они удовлетворяют соотношениям — уравнениям, которые их связывают. Самое известное из них — соотношение энергии и импульса Эйнштейна: квадрат энергии равен квадрату импульса, умноженному на квадрат скорости света, плюс квадрат массы, умноженный на скорость света в четвертой степени. Это не произвольное уравнение, навязанное извне. Это структурная особенность инвариантной алгебры релятивистских систем — ограничение, которому должна подчиняться любая система, удовлетворяющая симметриям специальной теории относительности.

Эти ограничения и придают инвариантной алгебре её силу. Они исключают конфигурации, которые в противном случае были бы возможны. Они гласят: сохраняющиеся величины этой системы не могут принимать любые значения; они должны лежать на определённой поверхности в пространстве всех возможных значений. Эта поверхность — геометрический объект, определяемый алгебраическими соотношениями между инвариантами, — является математическим ядром физической теории. Именно её предсказывает теория, проверяют эксперименты и именно она делает математику нетривиальной.

Здесь аргумент принимает решающий оборот. Инвариантная алгебра устойчивой системы — это не просто удобное обобщение свойств системы. По своей природе это тот тип объекта, который изучает математика. Любая алгебра — любая совокупность элементов, замкнутая относительно сложения и умножения, удовлетворяющая определенным основным аксиомам, — автоматически является моделью формальной математической теории. Это не теорема, требующая доказательства; это следствие значения этих слов. Формальная теория определяет аксиомы; модель — это конкретная структура, удовлетворяющая этим аксиомам. Инвариантная алгебра удовлетворяет аксиомам коммутативной алгебры. Следовательно, она является моделью теории коммутативных алгебр.

Но суть гораздо глубже. Инвариантная алгебра — это не просто модель общей теории всех алгебр, это модель конкретной, субстантивной теории, определяемой собственными особыми ограничениями. Соотношение энергии и импульса, сохранение заряда, тождества, связывающие угловой момент с вращательной симметрией — это аксиомы конкретной теории, которой удовлетворяет инвариантная алгебра. И эта конкретная теория конечно выразима (ее можно записать в виде конечного числа аксиом), имеет нетривиальные следствия (она исключает конфигурации, нарушающие ограничения) и многократно реализуема (различные физические системы могут удовлетворять одной и той же алгебре, подобно тому как разные здания могут иметь один и тот же архитектурный план).

Это и есть мост. Физический мир, поскольку он состоит из устойчивых систем, обладает алгебраической структурой. Эта алгебраическая структура по определению является моделью формальной математической теории. Следовательно, физический мир неизбежно описывается математикой. Это соответствие не случайно, не чудо, не дар. Это структурная необходимость, столь же неизбежная, как тот факт, что у треугольника три стороны.

В общих чертах мы пришли к тезису о фильтре персистентности. Детали — формальные определения, точные теоремы, тщательные доказательства — являются предметом научной статьи, прилагаемой к этому тому. Но основная идея содержится здесь, в этих трех главах: персистентность означает наличие инвариантов; инварианты образуют алгебры; алгебры — это математические структуры. Мир математичен, потому что только математическое существует.

В последующих главах мы рассмотрим последствия этого открытия — почему определенные математические структуры повторяются в физике, как этот тезис распространяется за пределы физики на биологию и социальные науки, и что он означает для нашего понимания человеческого разума и его связи с миром, который он стремится постичь. Но фундамент уже заложен. На вопрос, заданный Вигнером, есть ответ, и этот ответ — настойчивость.

Глава 4. От инвариантности к алгебре

В предыдущей главе мы видели, что инварианты устойчивой системы не существуют изолированно. Их можно складывать, умножать и комбинировать, и результаты при этом остаются инвариантными. Эта замкнутость относительно арифметических операций означает, что инварианты образуют алгебру — структурированную систему со своей собственной внутренней логикой. В этой главе мы рассмотрим, как выглядит эта алгебра, что она кодирует и почему её существование является ключом к объяснению эффективности математики.

Чтобы понять, что такое алгебра , представьте её в сравнении с обычным списком. Список чисел — пять , три, один — не имеет внутренних связей. Числа расположены рядом, не связанные между собой. Вы можете переставлять их, добавлять к ним, удалять из них, и ничего во внутренней структуре списка не изменится, потому что внутренней структуры как таковой нет.

Алгебра устроена иначе. В алгебре элементы связаны между собой операциями — сложением, умножением — и эти операции накладывают ограничения. Если известны определенные элементы алгебры, то операции указывают, какие другие элементы также должны присутствовать. Если энергия и импульс присутствуют в алгебре, то их сумма тоже должна присутствовать, как и любая их полиномиальная комбинация. Алгебра порождает себя из исходных элементов, подобно кристаллу, растущему из семени.

Что еще более важно, элементы алгебры удовлетворяют тождествам — соотношениям, которые справедливы повсеместно, а не только для конкретных значений . В релятивистской системе энергия и импульс любой частицы связаны определенным тождеством: квадрат энергии минус квадрат импульса, умноженный на квадрат скорости света, равен квадрату массы покоя, умноженному на четвертую степень скорости света. Это тождество не является фактом для конкретной частицы. Это структурная особенность самой алгебры. Оно справедливо для каждого электрона, каждого фотона, каждого протона во Вселенной.

Эти тождества составляют скелет алгебры . Они определяют её форму, жёсткость, характер. Две алгебры с разными тождествами структурно различны, подобно тому как два здания с разными несущими конструкциями архитектурно различны. И две алгебры с одинаковыми тождествами структурно одинаковы, даже если описываемые ими физические системы внешне не связаны — подобно тому как римская и готическая арки имеют один и тот же структурный принцип, хотя выглядят по-разному и были построены с разницей в столетия.

Это глубокий факт, и на нём стоит остановиться. Алгебраические тождества между сохраняющимися величинами физической системы не являются произвольными наложениями. Они возникают из динамики — из специфического способа эволюции системы во времени. Разная динамика порождает разные тождества. Тождества ньютоновской механики отличаются от тождеств релятивистской механики, которые, в свою очередь, отличаются от тождеств квантовой механики. Каждый набор тождеств определяет свою алгебру, и каждая алгебра кодирует свой физический мир.

Но вот в чем загвоздка: однажды сформированная алгебра обретает собственную жизнь. Она становится объектом, который можно изучать независимо от физической системы, породившей ее. Математики могут исследовать ее свойства, классифицировать ее структуру, сравнивать ее с другими алгебрами, выводить следствия, которые не были очевидны из физической отправной точки. И когда они это делают — когда они следуют внутренней логике алгебры, куда бы она ни вела, — они часто открывают для себя в физическом мире то, о чем никто не подозревал.

Именно в этом механизме кроется та «необоснованная эффективность», о которой задумывался Вигнер. Алгебра инвариантов — это математический объект, который точно описывает структуру физической системы. Изучая этот объект, математики, по сути, изучают физическую систему косвенно. Выводы, которые они делают в рамках этой алгебры, должны выполняться и в физическом мире, поскольку алгебра и физический мир имеют одинаковую структуру. Знак минус в уравнении Дирака, предсказавшем существование позитрона, не был случайной математической диковинкой. Это была структурная особенность инвариантной алгебры релятивистской квантовой механики — алгебры, которая по необходимости описывала не только электроны, но и их антиматериальных партнеров.

Есть ещё одна особенность инвариантной алгебры, которая будет иметь большое значение в дальнейшем: алгебра кодирует симметрии системы. Симметрия, в научном смысле, — это преобразование, которое оставляет определённые величины неизменными. Вращение сферы не меняет её внешнего вида — сфера выглядит одинаково под любым углом. Это симметрия сферы. Перенос физического эксперимента из одного места в другое не меняет результата — законы физики одинаковы везде. Это симметрия пространства-времени.

Глубокая связь между симметриями и инвариантами была открыта математиком Эмми Нётер в 1918 году в теореме, которая сейчас считается одной из самых красивых теорем во всей физике. Нётер показала, что каждая непрерывная симметрия физической системы соответствует сохраняющейся величине, а каждая сохраняющаяся величина соответствует симметрии. Симметрия относительно сдвига во времени — тот факт, что законы физики не меняются изо дня в день — соответствует сохранению энергии. Симметрия относительно сдвига в пространстве — тот факт, что законы одинаковы здесь и там — соответствует сохранению импульса. Симметрия относительно вращения соответствует сохранению углового момента.

Теорема Нётер означает, что инвариантная алгебра устойчивой системы не просто фиксирует, какие величины сохраняются. Она кодирует всю группу симметрии системы — полный каталог преобразований, при которых система выглядит одинаково. Группа симметрии и инвариантная алгебра — две стороны одной медали: знание одной эквивалентно знанию другой. А группа симметрии, как мы увидим в последующих главах, определяет, какие математические структуры применимы — какие дифференциальные уравнения управляют динамикой, какие геометрии описывают пространство , какие алгебраические структуры организуют теорию.

Теперь мы можем понять, почему инварианты устойчивой системы — это гораздо больше, чем просто список чисел. Они образуют структурированную алгебру, управляемую тождествами, которые кодируют динамику и симметрии системы. Эта алгебра сама по себе является математическим объектом — объектом, который можно классифицировать, сравнивать и изучать, используя всю мощь абстрактной математики. И именно эта алгебра делает систему математически описываемой, не потому, что кто-то решил описать её таким образом, а потому, что алгебра существует, встроенная в саму устойчивость системы.

Следующая глава делает заключительный шаг: от алгебры к самому тезису. Если каждая персистентная система содержит инвариантную алгебру, и если каждая алгебра является моделью формальной математической теории, то каждая персистентная система математически описываема. Это тезис о фильтре персистентности, и он отвечает на вопрос Вигнера.

Глава 5. Фильтр

Теперь мы собрали все части воедино. Устойчивость требует наличия инвариантов. Инварианты образуют алгебры. Алгебры — это математические структуры. Вывод очевиден: каждая устойчивая система является математической структурой, или, точнее, каждая устойчивая система содержит в себе математическую структуру, которая с совершенной точностью описывает её инвариантные свойства.

Это тезис о фильтре персистентности, и он отвечает на вопрос Вигнера одним махом. Эффективность математики в естественных науках не является необоснованной. Она неизбежна. Это структурное следствие того факта, что физический мир состоит из вещей, которые сохраняются.

Чтобы понять, почему это ответ, а не просто переформулировка вопроса, рассмотрим, что утверждает и чего не утверждает этот тезис. Он не утверждает, что Вселенная «состоит из» математики, как утверждают некоторые философы. Это онтологическое утверждение — утверждение о том, чем вещи являются по своей сути, — и фильтр персистентности не делает такого утверждения. Он вполне совместим с точкой зрения, согласно которой Вселенная состоит из материи, энергии, полей или любой другой предпочитаемой вами онтологии. Тезис утверждает лишь то, что из чего бы ни состояла Вселенная, если она персистентна, она должна обладать математической структурой. Структура является следствием персистентности, а не заменой субстанции.

Тезис также не утверждает, что каждый аспект Вселенной может быть описан математически. Переходные явления — конфигурации материи и энергии, которые возникают и исчезают, не сохраняя никаких инвариантных свойств, — могут полностью сопротивляться математическому описанию. Всплеск воды в момент своего образования, до того, как появятся какие-либо закономерности, не является устойчивой системой и не обладает инвариантной алгеброй. Только когда всплеск образует определенный узор — рябь с определенной длиной волны, капли с определенным распределением по размерам — становится возможным математическое описание, потому что только тогда начинается устойчивость.

В диссертации утверждается следующее: существует фильтр, действующий на пространство всех возможных конфигураций материи и энергии. Критерием фильтра является устойчивость. Конфигурации, которым не хватает структурной регулярности, необходимой для устойчивости, не сохраняются. Они разрушаются, растворяются, рассеиваются. Конфигурации, которые переживают фильтр — те, которые мы наблюдаем, изучаем и на которых строим нашу науку, — это именно те, которые обладают достаточной инвариантной структурой, чтобы сохранять свою идентичность во времени. И каждая из этих сохранившихся конфигураций, согласно алгебраическим рассуждениям предыдущих глав, является моделью формальной математической теории.

Метафора фильтра намеренна и поучительна. Представьте себе сито, отделяющее золото от песка. Сито не создает золото; золото уже было там, смешанное с песком. Сито просто удаляет песок, оставляя только золото . Аналогично, фильтр персистентности не создает математическую структуру. Структура уже присутствует в динамике . Фильтр просто удаляет конфигурации, которым не хватает достаточной структуры для персистентности, оставляя только те, которые обладают богатой инвариантной архитектурой, делающей их пригодными для математического описания.

Эта метафора имеет важное следствие: фильтр предсказывает, что всё, что мы можем наблюдать, будет математически описываемо. Не потому, что мы решили наблюдать только математические вещи, и не потому, что наш разум навязывает математику нематематическому миру, а потому, что вещи, доступные для наблюдения — вещи, которые существовали достаточно долго, чтобы быть наблюдаемыми, —

проходят через этот фильтр. Математическая описываемость наблюдаемого мира — это не эффект отбора нашего внимания. Это эффект отбора самой реальности.

В этом смысле тезис о фильтре персистентности выходит за рамки объяснения, основанного на предвзятости отбора, которое рассматривал и отвергал Вигнер. Объяснение, основанное на предвзятости отбора, гласит: мы замечаем математические успехи и забываем математические неудачи, поэтому переоцениваем эффективность математики. Это, вероятно, правда, но это утверждение касается нашей психологии, а не мира. Тезис о фильтре персистентности гласит: для изучения существуют те вещи, которые сохраняются, и сохраняются те вещи, которые имеют математическую структуру. Отбор происходит не в нашей голове, а в мире.

Существует и другой способ оценить силу тезиса. Рассмотрим логическую структуру аргумента. Она состоит из трех шагов, каждый из которых представляет собой теорему, а не предположение. Первый: устойчивость требует наличия инвариантов. Это логическая истина — если ничто не инвариантно, ничто не сохраняется. Второй: инварианты образуют алгебры. Это математическая истина — замкнутость инвариантов относительно арифметических операций гарантируется определением инвариантности. Третий: алгебры являются моделями формальных теорий. Это теорема математической логики — любая структура с определенными свойствами удовлетворяет некоторому набору аксиом.

Вывод — что каждая устойчивая система является моделью формальной математической теории — следует из простейшей логической операции: цепочки из трех утверждений типа «если-то». В рассуждениях нет пробелов, нет скрытых предположений, нет апелляции к интуиции. Аргумент столь же строг, как силлогизм, и столь же безличен, как геометрическое доказательство.

И все же вывод нетривиален, потому что математические основы, гарантированные фильтром, нетривиальны. Инвариантная алгебра устойчивой системы — это не просто какая-либо математическая структура. Это специфическая, ограниченная, информативная структура, которая кодирует динамику и симметрии системы, генерирует проверяемые предсказания и может использоваться в различных физических реализациях. В этом суть следующей главы, в которой рассматривается возражение о том, что тезис доказывает слишком много, ничего не доказывая.

Глава 6. Богаче, чем просто список фактов.

К аргументации предыдущей главы есть естественное возражение, и его следует воспринять серьезно. Возражение звучит так: конечно, любую систему с определенными свойствами можно описать с помощью какой-либо формальной теории — достаточно записать все истинные утверждения о ней. Красный шар на столе можно описать теорией, аксиомы которой — «существует шар», «шар красный», «шар находится на столе». Это формальная теория, и шар является ее моделью. Но это не тот вид глубокой, предсказательной, объединяющей математики, которой восхищался Вигнер . Если тезис о фильтре персистентности лишь показывает, что персистентные системы можно описать тривиальными списками их собственных свойств, он ничего не объясняет.

Это возражение верно в том, что оно определяет — сам факт того, что любая структура удовлетворяет некоторой теории, действительно близок к тривиальности, — но неверно в том, к чему оно приводит. Математика, гарантированная фильтром персистентности, — это не тривиальный список фактов. Это нечто гораздо более богатое, и для понимания причин этого требуется более внимательное изучение структуры инвариантной алгебры.

Напомним, что инвариантная алгебра устойчивой системы порождается сохраняющимися величинами системы. В типичной физической системе эти сохраняющиеся величины не являются независимыми друг от друга. Они удовлетворяют соотношениям — полиномиальным тождествам, которые ограничивают их совместные значения. Энергия, импульс и масса релятивистской частицы не могут свободно принимать какие-либо значения; они должны удовлетворять соотношению энергия-импульс. Компоненты углового момента квантовой системы должны удовлетворять коммутационным соотношениям группы вращений. Сохраняющиеся заряды калибровочной теории должны соблюдать структуру калибровочной группы.

Эти соотношения составляют нетривиальное содержание инвариантной алгебры. Это не факты о конкретной системе — это универсальные ограничения, которым должна удовлетворять любая система данного типа. Они исключают возможности. Они порождают предсказания. Они объединяют разнообразные явления под общим структурным зонтиком.

Рассмотрим, что значит «нетривиальное» математическое описание. Тривиальное описание — это описание, которое говорит только то, что вам уже известно — список наблюдений, каталог измерений. Нетривиальное описание — это описание, которое говорит больше, чем вы в него вложили — оно сообщает вам то, чего вы раньше не знали, то, что можно проверить и потенциально опровергнуть. Соотношение энергии и импульса нетривиально в этом смысле: если вы измеряете энергию и импульс частицы, это соотношение говорит вам, какой должна быть масса, без прямого измерения массы. Если измеренная масса не совпадает с предсказанием, теория неверна. Это подлинное предсказательное содержание, и оно исходит из алгебраических соотношений между инвариантами, а не из списка отдельных измерений.

Существует прекрасный математический результат, который делает это точным. Немецкий математик Давид Гильберт доказал в конце XIX века, что любой полиномиальный идеал — любая совокупность полиномиальных соотношений между конечным множеством переменных — может быть порожден конечным числом полиномов. Это теорема Гильберта о базисе, и её следствие для нашего рассуждения очевидно: ограничения между сохраняющимися величинами устойчивой системы всегда могут быть выражены конечным числом тождеств. Теория системы конечно аксиоматизируема . Её можно записать. Её можно передать. Её можно преподать студенту или запрограммировать в компьютер. Она, в самом сильном смысле этого слова, поддаётся обучению.

Это разительный контраст с тривиальной теорией «списка фактов», на которую ссылается возражение. Список всех истинных утверждений о конкретной системе, как правило, бесконечен и не поддается обучению. Он каталогизирует все, что касается системы, ничего не сжимая. Инвариантная алгебра, напротив, представляет собой сжатие — конечное множество генераторов и соотношений, которое кодирует, в принципе, все структурно стабильное в системе. Сжатие возможно, потому что алгебраические соотношения между инвариантами не произвольны; они отражают динамику и симметрии, которые обеспечивают устойчивость системы.

Существует вторая особенность, отличающая инвариантную алгебру от тривиального описания: множественная реализуемость . Одна и та же алгебраическая структура — один и тот же набор генераторов и соотношений — может быть реализована многими различными физическими системами. Соотношение энергии и импульса выполняется для каждой релятивистской частицы: каждого электрона, каждого фотона, каждого нейтрино. Алгебра Ли группы вращений описывает угловой момент атомов, молекул, ядер и галактик. Алгебраическая структура инвариантов отражает тип, а не отдельный символ — универсальный шаблон, а не частный случай.

эта множественная реализуемость придает математике ее объединяющую силу. Когда физик обнаруживает, что два, казалось бы, не связанных между собой явления — вибрация барабана и колебание электромагнитного поля — описываются одним и тем же дифференциальным уравнением, причина в том, что обе системы имеют общую инвариантную алгебру. Эта алгебра отражает то, что объединяет две системы, абстрагируясь от различий в их материальном составе и физической интерпретации. Математика объединяет, потому что она описывает структуру, а структура — это то, что объединяет устойчивые системы.

Третья особенность — это то, что мы могли бы назвать градиентом глубины. Не все инвариантные алгебры одинаковы. Некоторые богаты — у них много генераторов, много соотношений , много нетривиальных следствий. Другие же разрежены — у них мало генераторов, мало соотношений и, соответственно, ограниченная предсказательная способность. Богатство алгебры зависит от богатства персистентности: системы со многими точными сохраняющимися величинами порождают богатые алгебры; системы с небольшим количеством приближенных сохраняющихся величин порождают разреженные.

Этот градиент с удивительной точностью отображается на эмпирическом ландшафте науки.

Фундаментальная физика, где законы сохранения точны, а группы симметрии велики, порождает самые богатые алгебры и наиболее точные математические описания. Стандартная модель физики элементарных частиц, с её сложной калибровочной группой и множеством сохраняющихся квантовых чисел, описывается математикой необычайной глубины и точности. Химия, где законы сохранения физики дополняются приблизительными правилами о связях и реакционной способности, порождает алгебры средней сложности и, соответственно, хорошие, но несовершенные математические модели. Биология, где соответствующие инварианты представляют собой гомеостатические заданные значения, поддерживаемые механизмами обратной связи, порождает более разреженные алгебры и более грубые модели. Социальные науки, где институциональные инварианты хрупки и легко нарушаются, порождают самые разреженные алгебры и наименее точную математику.

Этот градиент не является провалом тезиса. Это предсказание. Тезис о фильтре персистентности не утверждает, что математика работает одинаково хорошо везде. Он утверждает, что математика работает пропорционально персистентности, и что точность математического описания ограничена точностью инвариантов. Именно это мы и наблюдаем. Тезис объясняет не только то, почему математика работает, но и почему она работает лучше в одних областях, чем в других — вопрос, на который альтернативные подходы (платонизм, предвзятость отбора, эволюционные теории) не могут дать ответа.

Мы ответили на возражение. Математика персистентных систем — это не тривиальный список фактов. Это конечно выразимая, многократно реализуемая , нетривиально ограничивающая алгебраическая структура, богатство которой калибруется в зависимости от степени персистентности. Короче говоря, это именно тот вид математики, эффективность которой Вигнер счел необоснованной. И её существование гарантируется фильтром персистентности.

Глава 7. Градиент глубины

Одна из самых поразительных особенностей науки заключается в том, что математика работает не одинаково хорошо повсюду. В фундаментальной физике соответствие между математическим предсказанием и экспериментальным наблюдением может достигать необычайной точности. Магнитный момент электрона был рассчитан и измерен с точностью до одной триллионной доли — это самое точно подтвержденное предсказание в истории науки. На другом полюсе находятся социальные науки, где математические модели являются неточными, приблизительными и часто опровергаются. Экономические прогнозы не достигают своих целей. Социологические модели отражают тенденции, а не законы. Политология богаче повествованием, чем уравнениями.

Между этими крайностями находится спектр. Химия более математична, чем биология. Экология более математична, чем социология. Нейробиология более математична, чем психология, хотя разрыв сокращается. Вопрос в том: почему? Почему математика так хорошо работает в одних областях и так плохо в других?

Тезис о фильтре персистентности предлагает точный ответ: эффективность математики в любой области определяется богатством инвариантной структуры в этой области. Там, где законы сохранения точны и многочисленны, математика сильна. Там, где инварианты приблизительны и редки, математика слаба. Точность математического описания соответствует точности персистентности, и это соответствие не случайно, а является структурной необходимостью.

Представьте это как градиент — плавный переход от математически точного к математически неопределенному, определяемый степенью инвариантности, которой обладают системы в каждой области.

На вершине градиента находится фундаментальная физика. Группы симметрии фундаментальной физики огромны — группа Пуанкаре специальной теории относительности имеет десять независимых симметрий, соответствующих десяти точно сохраняющимся величинам (энергия, три компоненты импульса, три компоненты углового момента и три, связанные с движением центра масс). Калибровочные теории добавляют дополнительные симметрии, каждая со своим собственным сохраняющимся зарядом. Эти сохраняющиеся величины точны: они выполняются без исключения, с неограниченной точностью, для каждой частицы во Вселенной. Соответственно, инвариантная алгебра богата — множество генераторов, множество полиномиальных соотношений, множество нетривиальных следствий — и математическое описание соответственно точно.

На ступень ниже по градиенту находятся классическая механика и электродинамика. Здесь законы сохранения по-прежнему точны, но системы часто слишком сложны для точного решения. Инвариантная алгебра богата, но практическая задача извлечения из неё предсказаний может потребовать приближений — теории возмущений, численного моделирования, статистических методов. Математика работает идеально в принципе, но её применение к конкретным задачам ограничено вычислительной сложностью, а не какими-либо недостатками в математической структуре.

Далее расположена химия. Инвариантная структура химии унаследована от квантовой механики — сохранение энергии, заряда, спина и различных квантовых чисел, — но дополнена приблизительными правилами, возникающими из-за сложности многоэлектронных систем. Электронные оболочки атома не являются точными инвариантами ; это приблизительные закономерности, возникающие в результате взаимодействия квантовой механики и электростатического отталкивания. Правила химической связи, закономерности периодической таблицы и механизмы реакций носят математический характер, но они представляют собой приблизительные математические описания приблизительно устойчивых особенностей.

Ещё дальше находится биология. Живые организмы — это устойчивые системы par excellence — они сохраняют свою структуру и функции в течение временных масштабов, намного превышающих масштабы отдельных химических реакций, которые их поддерживают. Но инварианты биологических систем имеют иной характер, чем инварианты физики. Температура тела в тридцать семь градусов не сохраняется благодаря симметрии лагранжиана ; она поддерживается сложной петлёй обратной связи, включающей гипоталамус, кровеносную систему и метаболический механизм клетки. Инвариант реален — температура тела действительно стабильна во времени — но он поддерживается активной регуляцией, а не пассивным сохранением, и он является приблизительным, а не точным.

Соответственно, инвариантная алгебра биологической системы более разрежена, чем алгебра физической системы. В ней меньше независимых сохраняющихся величин, полиномиальные соотношения между ними менее жесткие, а генерируемые ими предсказания менее точны. Именно поэтому математическая биология — успешная, но приблизительная наука: математика работает, потому что существуют инварианты, но она работает приблизительно, потому что инварианты грубые.

В самом низу этой иерархии находятся социальные науки. Социальные институты — правовые системы, рынки, языки, культурные нормы — представляют собой устойчивые структуры, поддерживаемые правоприменением, традициями и привычками. Но их неизменные составляющие наиболее хрупки. Рыночная цена стабильна только до тех пор, пока сохраняются условия, которые её поддерживают; изменение настроений, регулирования или технологий может разрушить эту неизменность в одночасье. Правовой принцип сохраняется до тех пор, пока его не изменит законодательный орган. Культурная норма существует до тех пор, пока её не отвергнет какое-либо поколение.

Инвариантные алгебры социальных систем являются тонкими, маломерными и легко разрушаемыми. Математические модели, описывающие их — кривые спроса и предложения, равновесия в теории игр, статистические закономерности в поведении избирателей — соответственно, являются довольно примитивными. Они отражают тенденции, а не законы, закономерности, а не определенность. Это не потому, что социологи менее талантливы, чем физики. Это потому, что изучаемые ими системы менее устойчивы, а менее устойчивые системы имеют более разреженную инвариантную структуру.

Градиент глубины — это не просто постфактумное обоснование , не объяснение задним числом того, что нам уже было известно. Это подлинное предсказание тезиса о фильтре персистентности, которое можно сформулировать точно: точность наилучшего доступного математического описания класса систем должна быть ограничена функцией параметров персистентности этих систем — числом независимых инвариантов, точностью их сохранения и длительностью их действия. Это предсказание, по крайней мере в принципе, можно проверить, и оно согласуется со всем, что нам известно о ландшафте науки.

Градиент также объясняет то, с чем не справляются другие объяснения эффективности математики: направленность научного прогресса. По мере развития науки она, как правило, переходит от менее математических к более математическим описаниям. Это происходит не потому, что математики осваивают новые территории, а потому, что научный прогресс включает в себя открытие новых инвариантов — более глубоких, более точных, более фундаментальных законов сохранения, лежащих в основе приблизительных закономерностей повседневного опыта. История физики — это история открытия инвариантов: от закона сохранения горизонтальной скорости Галилея, От закона сохранения импульса Ньютона до закона сохранения энергии и калибровочных инвариантов современной физики элементарных частиц. Каждый новый инвариант обогащает алгебру и углубляет математическое описание.

В этом смысле градиент глубины представляет собой карту самого знания — график того, насколько глубоко мы исследовали инвариантную структуру различных областей и сколько еще предстоит сделать.

Глава 8. Симметрия как норма по умолчанию

Тезис о фильтре устойчивости объясняет, почему устойчивые системы поддаются математическому описанию. Но он оставляет без ответа вопрос: зачем вообще существуют устойчивые системы? Почему Вселенная содержит вещи, которые сохраняются? Почему вообще существуют инварианты?

Это основополагающий вопрос, и на него необходимо ответить, чтобы тезис не был обвинен в порочном круге. Если мы определяем персистентность через инварианты, а затем используем инварианты для объяснения математической описываемости , нам нужна независимая причина полагать, что инварианты существуют. В противном случае аргумент представляет собой замкнутый круг: персистентные системы являются математическими, потому что они имеют инварианты, а они имеют инварианты, потому что они персистентны.

На основной вопрос существует три ответа, каждый из которых рассматривает отдельный класс систем. Вместе они показывают, что существование инвариантов — это не случайность, а структурная особенность любой вселенной, хотя бы отдаленно похожей на нашу.

Первый ответ — самый глубокий, и он применим к фундаментальной физике. Он начинается с простого наблюдения: симметрия — это условие по умолчанию для пространства-времени.

Что это значит? Рассмотрим альтернативу. Вселенная без симметрии — это вселенная, в которой законы физики различны в каждой точке пространства, в каждый момент времени и для каждого направления, в котором вы смотрите. Не было бы никаких закономерностей, никаких паттернов, никаких повторяемых экспериментов. Бросив камень здесь, вы получите один результат; бросив его там, вы получите совершенно другой результат без видимой причины. Такая вселенная была бы максимально неупорядоченной — не хаотичной в техническом смысле, а бесструктурной, безликим белым шумом физических законов.

Примечательно, что такая вселенная не является вариантом по умолчанию. Это крайний случай, максимально маловероятная возможность, такое устройство, для описания которого требуется наибольшее количество информации. Вселенная, в которой законы физики одинаковы повсюду и всегда — вселенная с трансляционной и временной симметрией — на самом деле является более простой возможностью, той, для описания которой требуется меньше информации. Симметрия в этом смысле не нуждается в объяснении. Объяснение требует асимметрия. Идеально однородное пространство-время, в котором законы одинаковы повсюду и всегда, — это чистый холст; любое отклонение от однородности — это особенность, требующая дополнительного описания.

Это не просто философский аргумент. Он имеет точную математическую формулировку в теории информации. Количество информации, необходимое для описания физического закона, изменяющегося от точки к точке, пропорционально числу точек, умноженному на сложность изменения. Количество информации, необходимое для описания закона, одинакового везде, не зависит от числа точек — вы формулируете закон один раз, и он применяется повсеместно. Симметричные законы информационно дешевле асимметричных. В любой системе координат, где законы физики выбираются из пространства возможностей, взвешенных по простоте или вероятности, преобладают симметричные законы.

А симметрия, как доказала Эмми Нётер, означает законы сохранения. Если законы физики одинаковы в любое время, энергия сохраняется. Если они одинаковы в любом месте, импульс сохраняется. Если они одинаковы во всех направлениях, угловой момент сохраняется. Существование сохраняющихся величин в фундаментальной физике — это не случайный факт, который случайно оказался верным для нашей

Вселенной. Это структурное следствие простейшего предположения об единообразии физических законов.

Второй ответ на основной вопрос применим к макроскопическим системам — системам химии, материаловедения и термодинамики. Здесь соответствующие идеи исходят из статистической механики и принципа максимальной энтропии.

Рассмотрим пространство всех возможных микроскопических конфигураций физической системы — все способы расположения её атомов и молекул. Среди этих конфигураций те, которые совместимы с макроскопическими законами сохранения (сохранение полной энергии, общего числа частиц, полного заряда), значительно превосходят по численности те, которые не соответствуют им. Это и есть содержание второго закона термодинамики, прочитанное наоборот: причина, по которой макроскопические системы обычно демонстрируют сохраняющиеся величины, заключается не в том, что какой-либо внешний фактор накладывает на них закон сохранения, а в том, что подавляющее большинство микроскопических конфигураций согласуются с макроскопическим законом сохранения. Сохранение является статистическим правилом по умолчанию для систем со многими степенями свободы.

Третий ответ применим к системам, находящимся за пределами физики — биологическим организмам, социальным институтам, когнитивным процессам. Здесь речь идёт не о симметрии или статистике, а о другом типе фильтра: аналогии с естественным отбором.

В биологии естественный отбор не создает адаптации. Он отбирает их. Организмы с полезными признаками выживают и размножаются; организмы без них — нет. В результате получается популяция адаптированных организмов не потому, что адаптация была заложена в систему изначально, а потому, что неадаптированные организмы были отфильтрованы. Аналогично, фильтр устойчивости не создает инварианты. Он отбирает системы, которые ими обладают. Конфигурации с достаточной инвариантной структурой для сохранения своей идентичности сохраняются; конфигурации без нее исчезают. В результате получается мир, населенный устойчивыми, обладающими инвариантами системами — не потому, что инвариантность была заложена во Вселенной изначально, а потому, что неинвариантные конфигурации были отфильтрованы.

Стоит отметить одно существенное различие: естественный отбор действует на популяцию существующих организмов, тогда как фильтр устойчивости действует на пространство мыслимых конфигураций, большинство из которых так и не были реализованы. Фильтр ближе к ограничению того, что возможно, чем к процессу, действующему на то, что существует. Но объяснительная логика та же: повсеместность инвариантов объясняется невозможностью существования без них.

Эти три ответа — симметрия по умолчанию для фундаментальной физики, статистика по умолчанию для макроскопических систем и селекционистский аргумент для нефизических областей — в совокупности обосновывают фильтр персистентности на чем-то более глубоком, чем его собственные определения. Существование инвариантов не предполагается. Оно объясняется.

Глава 9. Мост Нётер

В 1918 году немецкий математик Эмми Нётер доказала теорему, которая, без сомнения, является одним из самых красивых и значимых результатов в истории науки. Теорема связывает два понятия, которые на первый взгляд кажутся не имеющими ничего общего: симметрию и сохранение. Она показывает, что они не просто связаны, но математически эквивалентны — две стороны одной медали, два языка для выражения одной и той же мысли.

Теорема Нётер гласит: для каждой непрерывной симметрии физической системы существует сохраняющаяся величина; и для каждой сохраняющейся величины существует непрерывная симметрия. Симметрия относительно сдвига во времени — тот факт, что законы физики не меняются изо дня в день — соответствует закону сохранения энергии. Симметрия относительно сдвига в пространстве — тот факт, что законы одинаковы в Париже и Токио — соответствует закону сохранения импульса. Симметрия относительно вращения — тот факт, что законы не зависят от направления взгляда — соответствует закону сохранения углового момента.

Теорема делает больше, чем просто устанавливает частные соответствия . Она предоставляет общий механизм: для любой непрерывной симметрии она выводит соответствующую сохраняющуюся величину с помощью точной математической формулы. Сохраняющаяся величина называется зарядом Нётер и является специфической функцией координат и скоростей системы. Механизм работает и в обратном направлении: для заданной сохраняющейся величины он определяет симметрию, которая её порождает.

В рамках тезиса о фильтре персистентности теорема Нётер служит мостом между абстрактным понятием персистентности и конкретными математическими структурами физики. Персистентность требует наличия инвариантов. Теорема Нётер говорит нам, что для систем, управляемых гладкой динамикой, инварианты возникают из симметрий. А симметрии, в свою очередь, определяют, какие математические модели применимы — какие группы, какие алгебры, какие геометрии организуют теорию.

Рассмотрим, что это означает для проблемы специфичности — вопроса о том, почему определенные математические структуры повторяются в физике. Группа вращения встречается повсюду: в теории углового момента, в классификации атомных спектров, в описании спина, в структуре электромагнитного поля. Почему? Потому что вращательная симметрия — инвариантность физического закона относительно пространственного вращения — является симметрией самого пространства-времени. Любая система, находящаяся во вращательно-симметричном пространстве, должна иметь свой угловой момент, организованный группой вращения. Математическая структура не выбирается физиком; она навязывается симметрией.

группа Лоренца — группа симметрий специальной теории относительности — присутствует в каждой релятивистской теории, от электродинамики до квантовой теории поля. Калибровочные группы Стандартной модели присутствуют в каждой теории фундаментальных сил. В каждом случае математическая структура определяется симметрией , а симметрия является особенностью устойчивого пространства-времени, в котором происходят физические процессы.

Однако здесь необходимо сделать важное уточнение, которое подробно обсуждается в прилагаемой к этому тому научной статье. Теорема Нётер применима к непрерывным симметриям систем со специфической математической структурой, называемой лагранжевой формулировкой. Не все физические системы обладают лагранжианами . Диссипативные системы — системы с трением, вязкостью или необратимым тепловым потоком — не сохраняют энергию в нётеровском смысле. Их инварианты имеют другой характер: аттракторы, критерии устойчивости Ляпунова, инвариантные статистические меры. Дискретные симметрии — такие как симметрия между материей и антиматерией или симметрия относительно зеркального отражения — не порождают сохраняющиеся величины посредством теоремы Нётер; они порождают правила отбора и квантовые числа посредством другого механизма.

Тезис о фильтре персистентности не зависит конкретно от теоремы Нётер. Он требует лишь, чтобы персистентные системы обладали инвариантами — независимо от механизма их существования. Теорема Нётер — это наиболее известный и элегантный мост между симметрией и сохранением, и она объясняет инварианты фундаментальной физики с необычайной красотой. Но алгебраические рассуждения предыдущих глав остаются в силе независимо от того, являются ли инварианты зарядами Нётер, топологическими инвариантами, дискретными квантовыми числами, размерностями аттракторов или гомеостатическими заданными значениями. Общность фильтра персистентности выходит за рамки любой отдельной теоремы.

Сама Нётер, возможно, оценила бы эту общность. Она была, прежде всего, алгебраистом — математиком, который видел силу абстрактной структуры в объединении, казалось бы, разрозненных явлений. Её теорема — это не просто результат в физике; это утверждение о глубокой алгебраической связи между преобразованием и инвариантностью. Тезис о фильтре персистентности распространяет это понимание за пределы лагранжевой физики на любую область, где вещи сохраняются: алгебраическая связь между персистентностью и математической структурой одинакова, независимо от того, является ли система галактикой, геномом или правительством.

В последующих главах мы увидим эту общность в действии — сначала в конкретных математических структурах, которые отбирает персистентность (непрерывность, вариационные принципы, гильбертово пространство), а затем в областях, выходящих за рамки физики, где фильтр работает с меньшей, но подлинной силой.

Глава 10. Почему непрерывность, почему плавность?

Физический мир, насколько нам известно, непрерывен. Камень не телепортируется из одного места в другое; он проходит через все промежуточные точки на своем пути. Температура планеты не перескакивает с холодной на горячую, не пересекая промежуточные значения. Траектория частицы в пространстве описывает плавную кривую, а не рваную последовательность несвязанных точек. Эта непрерывность настолько глубоко укоренена в нашем опыте, что мы редко ставим её под сомнение. Но на самом деле это замечательная структурная особенность — и тезис о фильтре персистентности объясняет, почему.

Вспомним определение устойчивости: система устойчива, когда некоторые из её наблюдаемых величин остаются приблизительно стабильными во времени. Рассмотрим, что происходит, если эволюция системы является скачкообразной — если сохраняющаяся величина может перескакивать с одного значения на другое, не проходя через промежуточные значения. Такой скачок означал бы, что рассматриваемая наблюдаемая величина изменяется на большую величину за сколь угодно короткий промежуток времени. Но определение устойчивости требует, чтобы наблюдаемые величины оставались в пределах допустимого диапазона в течение заданного периода времени. Скачкообразное изменение мгновенно нарушает это требование: в момент скачка наблюдаемая величина изменилась более чем на величину, превышающую допустимый диапазон, и условие устойчивости нарушается.

Это аргумент от устойчивости к непрерывности: если система должна сохраняться, её наблюдаемые величины должны непрерывно изменяться. Прерывистая эволюция несовместима с приблизительной стабильностью, которую требует устойчивость. Непрерывный характер физической динамики — это не предположение, заимствованное извне; это следствие фильтра.

Как только устанавливается непрерывность, при выполнении мягких условий следует и гладкость. Непрерывная функция, удовлетворяющая определенным требованиям регулярности — требованиям, которым удовлетворяет динамика любой системы, описываемой дифференциальными уравнениями, — автоматически дифференцируема, то есть скорость ее изменения четко определена. А дифференцируемость открывает доступ ко всему аппарату математического анализа: производным, интегралам, разложениям Тейлора, дифференциальным уравнениям. Математика математического анализа —

это не просто удобный инструмент для описания непрерывной динамики. Это естественный и неизбежный язык любой системы, которая существует непрерывно.

Это открытие имеет замечательное следствие: эффективность математического анализа в физике объясняется фильтром персистентности. Ньютон и Лейбниц изобрели математический анализ не потому, что у них возникло таинственное прозрение в глубинную природу реальности. Они изобрели его потому, что изучали персистентные системы — орбиты планет, траектории снарядов, потоки жидкостей, — а персистентные системы непрерывны, и непрерывные системы являются областью применения математического анализа. Соответствие инструмента и предмета исследования не случайно. Это структурное совпадение, гарантированное условиями персистентности.

Аргумент простирается дальше. Непрерывные системы, симметрии которых также непрерывны, образуют математические объекты, называемые группами Ли — названные в честь норвежского математика Софуса Ли, разработавшего их теорию в конце XIX века. Группа Ли — это группа преобразований, которая плавно изменяется, подобно группе всех вращений сферы (можно вращать на любой угол, а близкие углы дают близкие вращения). Группы Ли, возникающие в физике — группа вращений, группа Лоренца, калибровочные группы Стандартной модели — являются группами симметрии устойчивых систем в непрерывном пространстве-времени.

Весь аппарат дифференциальной геометрии — многообразия, касательные пространства, кривизна, связности — вытекает из требования непрерывности и гладкости симметрий и динамики устойчивых систем. Этот аппарат не является произвольным математическим выбором физиков. Это уникальная математическая основа, совместимая с устойчивостью в непрерывной среде. Эйнштейн выбрал риманову геометрию для описания гравитации не потому, что она была эстетически привлекательна (хотя это так). Он выбрал её потому, что гравитация — это кривизна непрерывного пространства-времени, а риманова геометрия — это математика искривлённых непрерывных пространств. Фильтр устойчивости выбрал математику; Эйнштейн открыл этот выбор.

Есть важное замечание, и честность требует его четкого изложения. Аргумент показывает, что персистентность отбирает непрерывность среди систем, которые уже находятся в топологическом пространстве — пространстве, в котором определено понятие «близлежащий». Он не объясняет, почему физическое пространство-время вообще является топологическим пространством или почему оно имеет именно такую размерность (три измерения пространства, одно время). Это более глубокие вопросы, которые фильтр персистентности в его нынешней форме не затрагивает. Фильтр объясняет, почему, если арена непрерывна, динамика должна быть непрерывной , а математика — дифференциальным и интегральным исчислением. Он не объясняет, почему арена непрерывна.

Это ограничение, о котором стоит помнить. Тезис о фильтре персистентности силен, но не всемогущ. Он многое объясняет в том, почему работает математика, но не всё. Топологическая структура пространства-времени может быть одной из особенностей, обусловленных скорее разумом, чем самим миром — этот вопрос мы рассмотрим в последующих главах, когда будем рассматривать кантовский контртезис.

На данный момент вывод ясен: непрерывный, гладкий, дифференцируемый характер физических законов — причина, по которой работает дифференциальное и интегральное исчисление — является следствием постоянства. А с непрерывностью приходит весь математический аппарат, который физики используют для описания мира: исчисление Ньютона, геометрия Римана, теория групп Ли.

Глава 11. Почему важны вариационные принципы?

В физике существует закономерность, настолько распространенная, что она приобрела почти мистическую репутацию: принцип наименьшего действия. Когда мяч бросают, он движется по воздуху не просто по любой траектории, а по той, которая минимизирует определенную величину — действие, определяемое как интеграл по времени от разницы между кинетической энергией мяча и его потенциальной энергией. Когда свет перемещается из одной точки в другую, он выбирает путь кратчайшего времени, а не путь кратчайшего расстояния. Когда мыльная пленка покрывает проволочный каркас, она принимает форму, которая минимизирует ее площадь поверхности.

Вариационный характер физического закона был независимо открыт Эйлером, Лагранжем и Гамильтоном в XVIII и XIX веках и с тех пор является центральным организующим принципом физики. Каждая фундаментальная теория — классическая механика, электродинамика, общая теория относительности, квантовая теория поля — может быть сформулирована как вариационный принцип: истинная эволюция системы — это та, которая делает действие стационарным (ни возрастающим, ни убывающим при малых возмущениях).

Почему? Почему природа предпочитает пути, которые приводят к крайним последствиям? Загадка Вигнера имеет здесь родственную причину: необоснованная эффективность вариационного принципа. И тезис о фильтре персистентности дает ответ.

Ответ начинается с простого наблюдения о стабильности. Устойчивая траектория — та, которая сохраняет свой качественный характер при малых возмущениях — должна быть нечувствительна к возмущениям. Если её слегка подтолкнуть, она не улетит в совершенно другую область пространства состояний; она вернется к чему-то близкому к исходному пути. Эта нечувствительность к возмущениям является именно определяющим свойством стационарной точки действия: в стационарной точке малые изменения в пути приводят только к изменениям второго порядка в действии, а не первого. Путь «плоский» в пространстве всех возможных путей, находясь в седловой точке или минимуме, где бесконечно малые вариации не приводят к изменениям первого порядка.

Напротив, нестационарная траектория — это траектория, где малые возмущения вызывают большие изменения в действии, а следовательно, и большие изменения в динамике. Такая траектория, как правило, неустойчива: любое крошечное возмущение отклонит систему на совершенно другую траекторию.

Неустойчивые траектории не сохраняются. Они стираются неизбежными возмущениями, которые испытывает любая физическая система — тепловыми флуктуациями, квантовой неопределенностью, гравитационными приливами, электромагнитным шумом.

Таким образом, фильтр устойчивости отбирает стационарные пути — пути, которые экстремально увеличивают действие, — потому что только эти пути достаточно стабильны, чтобы существовать. Вариационный характер физических законов — это не таинственная особенность, навязанная космическим создателем. Это следствие устойчивости: среди всех мыслимых траекторий только вариационные проходят через фильтр.

Это можно наглядно представить геометрически. Представьте себе пространство всех возможных траекторий физической системы — бесконечномерное пространство, в котором каждая точка представляет собой полную историю. Действие присваивает каждой траектории число. Стационарные траектории — те, которые выбирает физика — это хребты и долины ландшафта действия, места, где местность ровная. Именно эти траектории сохраняются, потому что система, находящаяся на хребте или в долине, не подвергается воздействию ландшафта действия, который бы заставлял её двигаться по другой траектории. Система же, находящаяся на склоне, напротив, движется вниз — она нестабильна, её траектория меняется, и она не сохраняется.

Этот аргумент имеет важное уточнение. Он применим к системам, которые могут быть описаны лагранжианом — математической функцией, кодирующей разницу между кинетической и потенциальной энергией. Не все физические системы имеют естественное лагранжево описание. Диссипативные системы — системы с трением, тепловым потоком или необратимыми процессами — не вписываются в лагранжеву модель. Для таких систем фильтр персистентности по-прежнему работает, но по другому механизму: вместо выбора траекторий, минимизирующих действие , он выбирает траектории, которые сходятся к аттракторам — стабильным долговременным конфигурациям , которые сопротивляются возмущениям за счет диссипативного затухания, а не за счет вариационной стационарности.

Независимо от того, является ли система консервативной (управляемой лагранжианом) или диссипативной (управляемой трением и потоком), лежащая в её основе логика одинакова: персистентность обеспечивает стабильность, а стабильность накладывает математическую структуру на динамику. Вариационный принцип — это специфическая форма, которую принимает эта структура в консервативных системах. Теория аттракторов динамических систем — это форма, которую она принимает в диссипативных системах. Оба являются следствием фильтра персистентности, применяемого к различным классам систем.

Таким образом, универсальность вариационных принципов в физике — от механики частиц до распространения света и искривления пространства-времени — не является загадкой. Это признак фильтра, отбирающего математически структурированные траектории, которые сами по себе достаточно стабильны, чтобы сохраняться.

Глава 12. Почему гильбертово пространство?

Из всех математических структур, встречающихся в физике, ни одна не вызывает столько удивления, как та, что лежит в основе квантовой механики: гильбертово пространство. Гильбертово пространство, по сути, является бесконечномерным обобщением обычного трехмерного пространства, снабженным понятиями угла и расстояния и управляемым арифметикой комплексных чисел — чисел, содержащих квадратный корень из минус единицы. На первый взгляд, это чрезвычайно маловероятный кандидат на роль языка фундаментальной физики. Почему поведение электронов , фотонов и атомов должно описываться векторами в бесконечномерном пространстве комплексных чисел?

Тезис о фильтре персистентности предлагает ответ, и он вытекает из цепочки рассуждений, которая, если её осознать, становится практически неизбежной.

Начнём с квантового состояния. Квантовая система — например, электрон — описывается состоянием, которое кодирует всё, что можно знать о системе. В отличие от классического состояния (которое определяет положение и импульс частицы), квантовое состояние определяет вероятности : вероятность обнаружения электрона здесь, а не там, с этим спином, а не с тем, при этой энергии, а не при другой.

Теперь рассмотрим, что означает «устойчивость» для квантовой системы. Электрон сохраняется как узнаваемая физическая сущность с течением времени. Его идентичность определяется вероятностями, которые он присваивает результатам измерений — это наблюдаемые величины, которые остаются стабильными. В квантовом контексте устойчивость означает, что эти вероятности перехода сохраняются по мере эволюции системы.

Это, казалось бы, скромное требование — сохранение вероятностей — имеет необычайные математические последствия. В 1931 году физик Юджин Вигнер (тот самый Вигнер, который поставил вопрос об эффективности математики) доказал замечательную теорему: любое преобразование, сохраняющее вероятности перехода между квантовыми состояниями, должно быть либо унитарным, либо антиунитарным. Унитарный перевод — это, грубо говоря, вращение в пространстве квантовых состояний — он сохраняет углы и расстояния. Антиунитарный перевод — это вращение в сочетании с обращением, подобно зеркальному изображению. Временная эволюция относится к первому типу: она унитарна.

Теорема Вигнера является связующим звеном между инерцией и структурой гильбертова пространства квантовой механики. Если вероятности перехода являются инвариантами квантовой системы, и если инерция требует сохранения этих инвариантов, то временная эволюция должна быть унитарной. Но унитарные преобразования определены на очень специфическом типе математического пространства: комплексном пространстве с внутренним произведением — то есть гильбертовом пространстве.

Цепочка продолжается. Как только мы узнаем, что временная эволюция является унитарной, другая классическая теорема — принадлежащая математику Маршаллу Стоуну — говорит нам, что любое непрерывное однопараметрическое семейство унитарных преобразований может быть записано в виде экспоненты, включающей самосопряженный оператор. Этот самосопряженный оператор является гамильтонианом — математическим объектом, который кодирует энергию системы и генерирует ее временную эволюцию. Теорема Стоуна гарантирует существование гамильтониана, его действие в гильбертовом пространстве и наличие у него действительного спектра (его энергетические значения являются действительными числами, а не комплексными).

Результат поразителен: весь математический аппарат квантовой механики — комплексные гильбертовы пространства, унитарная эволюция, самосопряженные гамильтонианы с действительными энергетическими спектрами — вытекает из сохранения вероятностей переходов. Нам не нужно было постулировать гильбертово пространство. Нам не нужно было предполагать наличие комплексных чисел. Нам не нужно было прибегать к уравнению Шрёдингера. Все эти структуры навязываются нам требованием сохранения квантовой системы — сохранения её вероятностной идентичности во времени.

Это наиболее впечатляющее проявление фильтра персистентности в действии. Математическая основа квантовой механики, которая казалась Вигнеру необъяснимым даром, оказывается структурной необходимостью — уникальной математической архитектурой, совместимой с персистентностью квантовых систем.

Однако в аргументации есть существенный пробел, и его необходимо признать. Цепочка рассуждений начинается с предположения, что квантовые состояния обладают вероятностной структурой — что существуют четко определенные вероятности перехода между состояниями. Это уже составляет значительную часть квантовой модели. Выведение существования самой вероятностной структуры исключительно из условий персистентности остается открытой проблемой. Недавние работы в области основ квантовой механики — в частности, информационно-теоретические реконструкции квантовой теории — достигли прогресса в этом направлении, показав, что правила квантовой вероятности могут быть выведены из небольшого числа постулатов об обработке информации. Но вывод еще не завершен, и утверждение о том, что структура гильбертова пространства квантовой механики полностью выведена исключительно из условий персистентности, было бы преувеличением.

Фильтр персистентности показывает, что, как только вероятностная структура сформирована, остальная часть квантовой механики следует за ней. Фильтр объясняет, почему квантовая механика имеет именно такую математическую форму — почему гильбертовы пространства, а не какие-либо другие типы пространств, почему комплексные числа, а не действительные, почему унитарные, а не ортогональные преобразования. Это не произвольный выбор или историческая случайность. Это единственно возможное объяснение. математические структуры, совместимые с сохранением квантовых вероятностей.

Математическая основа глубочайшей физической теории, которой мы обладаем, не является загадкой. Это признак настойчивости, выраженный на языке алгебры и геометрии, столь же неизбежный, как форма кристалла определяется симметрией его молекул.

Глава 13. Пять миров

Абстрактные аргументы убедительны только тогда, когда их можно проверить на конкретных примерах. Тезис о фильтре персистентности утверждает, что персистентность требует инвариантов, инварианты образуют алгебры, а алгебры являются математическими структурами. В этой главе мы рассмотрим пять совершенно разных систем — простую игру в перестановки, качающийся маятник, клеточный автомат, странный аттрактор и биологический термостат — и увидим, как этот тезис работает на практике в каждой из них.

Рассмотрим сначала простейшую иллюстрацию: систему с шестью состояниями, расположенными по кругу, где динамика циклически переходит из одного состояния в другое, подобно сиденьям на карусели. Каждое состояние по очереди посещает каждое другое, и система возвращается к исходной конфигурации через шесть шагов. В этой системе единственная величина, которая не меняется, — это величина, которая уже везде постоянна, — математический эквивалент утверждения «ничего особенного не происходит». Инвариантная алгебра тривиальна: она содержит только константы и не кодирует никакой интересной структуры. Эта система не имеет устойчивой подструктуры и, соответственно, не имеет нетривиальной математики.

Теперь немного изменим динамику . Вместо одного большого цикла, проходящего через все шесть состояний, пусть система разложится на три отдельные орбиты: одну с тремя состояниями, одну с двумя и одну, которая остается неизменной. Внезапно появляются инварианты. Любая величина, которая постоянна внутри каждой орбиты, но различна между орбитами, является инвариантной. Эти величины можно складывать и умножать, получая трехмерную алгебру — по одному измерению на каждую орбиту. Эта алгебра кодирует разложение системы на устойчивые подсистемы, и делает это точно: знание алгебры эквивалентно знанию структуры орбит. Устойчивость создала математическую структуру из ничего.

Второй пример — двойной маятник: два жестких плеча, соединенных шарнирами, качаются под действием силы тяжести. При низких энергиях двойной маятник качается плавно, и энергия каждого плеча приблизительно сохраняется: энергия медленно перетекает между двумя плечами, но не перераспределяется резко. Инвариантная алгебра приблизительно двумерна — она порождается полной энергией и энергией одного плеча — и движение ограничено простой, предсказуемой поверхностью в пространстве возможностей. Математика достаточно богата, чтобы делать предсказания: зная энергию каждого плеча, можно предсказать движение на длительные промежутки времени.

Но стоит увеличить энергию, и происходит нечто драматическое. Маятник переходит в хаотический режим. Энергия отдельных плеч маятника перестает даже приблизительно сохраняться — энергия Перераспределение между двумя рукавами происходит резко и непредсказуемо. Единственным сохранившимся инвариантом является полная энергия. Инвариантная алгебра схлопывается из двух измерений в одно. Движение, которое ранее ограничивалось простой поверхностью, теперь заполняет гораздо большую область пространства состояний. Предсказание становится экспоненциально сложным. Математическое описание истончается точно так же, как и потеря инвариантов.

Это миниатюрный градиент глубины. Одна и та же физическая система при разных энергиях демонстрирует разную степень устойчивости, разные размеры инвариантной алгебры и, соответственно, разную степень математической разрешимости. В диссертации предсказывается эта взаимосвязь; двойной маятник является её примером.

Третий пример выбран намеренно, чтобы проверить тезис: игра «Жизнь» Конвея, клеточный автомат, в котором клетки на бесконечной сетке переключаются между состояниями «живые» и «мертвые» в соответствии с простыми правилами, основанными на количестве живых соседей . Здесь нет лагранжиана , нет непрерывной симметрии, нет теоремы Нётер. Система дискретная, детерминированная и настолько далека от гладкого мира дифференциальных уравнений, насколько это вообще возможно для системы.

И все же устойчивые структуры встречаются повсеместно. Планер — небольшая конфигурация из пяти ячеек — перемещается по диагонали сетки, возвращаясь к своей первоначальной форме каждые четыре шага по времени. Планер обладает инвариантами: скоростью, периодом и формой. Эти инварианты точно сохраняются до тех пор, пока планер не сталкивается с другой структурой. Они порождают небольшую , но нетривиальную алгебру . Планер — это устойчивая система с математической структурой, и эта структура не имеет ничего общего с теоремой Нётер или лагранжевой механикой. Фильтр устойчивости не интересует механизм инвариантности. Его интересует только то, что инвариантность существует.

Четвертый пример еще дальше выходит за пределы зоны комфорта гамильтоновой физики. Система Лоренца — три связанных уравнения, описывающие конвективное течение жидкости, — является диссипативной: объемы в пространстве состояний сжимаются, энергия теряется из-за трения, и в традиционном смысле нет сохраняющейся энергии. Тем не менее, аттрактор Лоренца, знаменитая кривая в форме бабочки, к которой приближаются траектории, представляет собой устойчивую структуру необычайной математической сложности. Его инварианты — это не сохраняющиеся величины, а геометрические свойства: его фрактальная размерность, его показатели Ляпунова, его статистическое распределение. Эти геометрические инварианты столь же реальны, столь же точно определены и столь же математически плодотворны, как любой заряд Нётер. Они порождают математическое описание аттрактора — его топологический тип, его символическую динамику, его эргодические свойства — которое составляет содержательную, предсказательную теорию диссипативной устойчивой структуры.

Пятый и последний пример подводит нас к биологии. Рассмотрим простую модель терморегуляции: температура тела, которая приближается к заданному значению с помощью механизма обратной связи и отклоняется от него под воздействием колебаний окружающей среды. Заданное значение является точным инвариантом — оно не изменяется в динамике. Коэффициент усиления обратной связи — еще один инвариант. Вместе они образуют двумерную алгебру, и эта алгебра определяет теорию: теорию гомеостатических систем с обратной связью. Эта теория конечно выразима, имеет нетривиальные следствия (она предсказывает, что средняя температура будет равна заданному значению) и многократно реализуема (одна и та же теория описывает терморегуляцию млекопитающих, бактериальный хемотаксис и инженерные термостаты). Математическая разрешимость гомеостатических систем является прямым следствием фильтра персистентности.

Пять миров, пять доказательств одного и того же тезиса. Тривиальная дискретная система без персистентности и математики. Маятник с градиентом глубины от богатой математики к тонкой математике в качестве градиентов персистентности. Клеточный автомат с персистентностью и математикой в условиях, где теорема Нётер неприменима. Диссипативный аттрактор с геометрическими инвариантами и богатой математической теорией. И биологический термостат с инвариантами, поддерживаемыми обратной связью, и осуществимой формальной теорией. Фильтр персистентности работает во всех них, независимо от механизма — симметрии, обратной связи, геометрии, отбора — который поддерживает инварианты.

Глава 14. Космос альтернатив

Тезис о фильтре персистентности — не единственный ответ на загадку Вигнера. За шесть десятилетий, прошедших с момента публикации эссе Вигнера, философы, физики и математики предложили множество объяснений эффективности математики, от самых скромных до самых экстравагантных. Понимание этих альтернатив — что они объясняют, в чём они преуспевают, а в чём терпят неудачу — имеет важное значение для оценки вклада фильтра персистентности в эту дискуссию.

Наиболее радикальной альтернативой является гипотеза математической Вселенной, предложенная физиком Максом Тегмарком. Утверждение Тегмарка поражает своей простотой: физическая Вселенная не просто напоминает математическую структуру или подчиняется математическому описанию. Она и есть математическая структура. Материя, энергия, пространство и время — это не то, что математика описывает извне; это математические отношения, чистые и простые. С этой точки зрения эффективность математики не является загадкой, потому что физика — это математика.

Тегмарк идет еще дальше. Он предполагает, что каждая непротиворечивая математическая структура является физической вселенной — что существует обширная мультивселенная, содержащая каждую логически возможную реальность, и наша вселенная — это одна из бесчисленных структур. Это мультивселенная IV уровня, и она является логической конечной точкой математического платонизма: если математические структуры существуют, и если физическое существование просто означает быть математической структурой, то каждая математическая структура существует физически.

Гипотеза математической вселенной обладает определенной логической элегантностью, но сталкивается с серьезными трудностями. Наиболее актуальной является проблема меры: если каждая математическая структура одинаково реальна, почему мы оказываемся именно в этой? Гипотеза нуждается в вероятностной мере над пространством всех математических структур, но удовлетворительная мера до сих пор не построена — и есть основания сомневаться в ее существовании. Гипотеза также сталкивается с проблемами со стороны математической логики: теоремы Гёделя о неполноте показывают, что любая достаточно богатая математическая система содержит истинные утверждения, которые невозможно доказать внутри этой системы, что поднимает вопрос о том, содержит ли физическая вселенная факты, ускользающие от математического описания.

Тезис о фильтре персистентности совместим с гипотезой Тегмарка , но не требует её наличия. Если гипотеза о математической вселенной верна, то фильтр персистентности является принципом отбора в математической мультивселенной — он отбирает наблюдаемые нами структуры из огромного пространства всех возможных структур. Но фильтр персистентности одинаково хорошо работает и при гораздо более скромных онтологических предположениях. Он не требует, чтобы все математические структуры были физически реальными. Он требует лишь, чтобы наблюдаемые нами физические структуры были персистентными, и чтобы персистентность влекла за собой математическую описываемость .

Более умеренная группа подходов носит название структурного реализма. Структурные реалисты утверждают, что в ходе революционных изменений в теории науки сохраняется математическая структура, а не онтологическая приверженность. Когда физика перешла от ньютоновской гравитации к общей теории относительности, лежащая в её основе онтология полностью изменилась — от сил, действующих на расстоянии, до искривления пространства-времени, — но математические соотношения, которые отразила ньютоновская теория (закон обратных квадратов, сохранение энергии и импульса), сохранились в модифицированной форме. Структурный реализм утверждает: мы должны быть реалистами в отношении математической структуры и агностиками в отношении лежащей в её основе онтологии.

Существует два варианта. Эпистемический структурный реализм утверждает, что всё, что мы можем знать о мире, — это его структура. Онтический структурный реализм утверждает, что структура — это всё, что существует, — что мир состоит из отношений, а не из вещей, находящихся во отношениях. Тезис о фильтре персистентности обеспечивает основу для структурного реализма, объясняя, почему мир вообще обладает математической структурой: потому что этого требует персистентность. Без фильтра персистентности структурный реализм вынужден воспринимать математический характер мира как неоспоримый факт. С фильтром же появляется механизм.

Другой подход фокусируется на отображении между математическими и физическими структурами. Концепция отображения, наиболее подробно разработанная Кристофером Пинкоком, а также Отавио Буэно и Стивеном Френчем, анализирует применение математики с точки зрения сохраняющих структуру соответствий между математическими моделями и физическими областями. Математика работает, когда существует точное отображение — гомоморфизм или частичный изоморфизм — между математической структурой и физической ситуацией. Фильтр персистентности объясняет, почему такие отображения существуют: инвариантная алгебра персистентной системы по построению является математической структурой, поэтому отображение из физической системы в её алгебру автоматически сохраняет структуру.

Наконец, существуют концепции, основанные на философии математики, которую сам Вигнер рассматривал: конвенционализм. Согласно этой точке зрения, соответствие между математикой и физикой отчасти является артефактом того, как строятся теории. Выбор математической структуры включает в себя конвенциональные элементы — системы координат, единицы измерения, выбор калибровочных значений — которые не продиктованы природой. Конвенционалист не ошибается: в математической физике есть конвенциональный компонент. Но тезис о фильтре персистентности проводит четкую границу между конвенциональным и неконвенциональным. Инвариантная алгебра объективна — она определяется динамикой, а не выбором теоретика. Представление алгебры — выбор генераторов, система координат, формализм — является конвенциональным. Фильтр определяет, что является существенным, а что случайным в математическом описании мира.

Глава 15. Структура от начала до конца.

Идея о том, что мир по своей сути структурен — что на самом глубоком уровне существует не совокупность вещей, а сеть отношений — является одной из старейших и наиболее провокационных идей в философии. Она восходит к «Формам» Платона, реляционному взгляду Лейбница на пространство и современной программе онтического структурного реализма. В этой главе мы рассмотрим, как тезис о фильтре персистентности освещает и расширяет эту традицию.

Начнём с наблюдения из истории физики. В XIX веке физики считали, что свет — это вибрация материальной среды — светоносного эфира, — подобно тому как звук — это вибрация воздуха. Предполагалось, что эфир заполняет всё пространство, является идеально жёстким (чтобы поддерживать высокую частоту световых волн) и в то же время идеально прозрачным (чтобы не препятствовать движению планет). Эти противоречивые свойства вызывали глубокое беспокойство, но эфир казался необходимым: как может существовать волна без среды, в которой она колеблется?

Затем появился Эйнштейн. Специальная теория относительности показала, что эфир не просто не нужен, но и противоречит наблюдаемому поведению света. Эфира не существует. Свет — это не вибрация чего-либо материального. Это самораспространяющееся возбуждение электромагнитного поля — структура, а не вещество. Вещество было исключено; структура осталась. И все предсказания, которые приписывались эфиру — скорость света, законы оптики, поведение электромагнитного излучения — прекрасно пережили это исключение, потому что они никогда не зависели от вещества. Они зависели от структуры.

Эта закономерность — исчезновение субстанции и сохранение структуры — повторяется на протяжении всей истории физики. Калорическая жидкость была исключена из термодинамики, но структурные взаимосвязи между теплом, работой и энтропией сохранились. Механические модели электромагнитного поля были исключены, но уравнения Максвелла сохранились. Определенные траектории классических частиц были исключены квантовой механикой, но алгебраическая структура наблюдаемых величин и их коммутационные соотношения сохранились. На каждом этапе то, что казалось существенным (субстанция), оказывалось излишним, а то, что казалось второстепенным (математическая структура), оказывалось фундаментальным.

Структурный реализм как философская позиция серьезно относится к этой закономерности. Он утверждает: урок истории науки заключается в том, что мы должны быть реалистами в отношении математической структуры и агностиками во всем остальном. Математические соотношения, которые описывает теория — уравнения, симметрии, законы сохранения — это аспекты, которые с наибольшей вероятностью переживут будущие научные революции. Онтологические обязательства — то, из чего, по мнению теории, состоит мир — это аспекты, от которых с наибольшей вероятностью откажутся.

Тезис о фильтре персистентности дает этой философской интуиции точное обоснование. Почему структура сохраняется? Потому что структура — это то, что сохраняет персистентность. Инвариантная алгебра персистентной системы — это математическая структура, которая остается неизменной, в то время как все остальное меняется — в то время как атомы заменяются, координаты преобразуются, а теоретическая основа пересматривается. Структура сохраняется, потому что структура, по определению, — это то, что не меняется. А то, что не меняется, и есть персистентность.

Этот взгляд проливает свет на один из самых глубоких вопросов философии науки: что делает научную теорию успешной? Стандартный ответ — точность предсказаний: теория хороша, если она делает правильные предсказания. Но фильтр персистентности предполагает более глубокий критерий: структурную достоверность.

Теория успешна в той мере, в какой она отражает инвариантную алгебру описываемой ею системы. Предсказания верны, потому что алгебра ограничивает поведение системы , и теория кодирует эти ограничения. Успех предсказаний — это симптом структурной достоверности, а не наоборот.

Концепция отображения математической применимости, разработанная Пинкоком, а также Буэно и Френчем, естественным образом вписывается в эту картину. Согласно этой концепции, математика применяется к физическому миру посредством сохраняющих структуру отображений между математическими моделями и физическими областями. Фильтр персистентности объясняет, почему такие отображения существуют и почему они являются точными: инвариантная алгебра персистентной системы по определению является математической структурой, поэтому отображение из системы в ее алгебру автоматически сохраняет структуру. Отображение не нужно навязывать извне. Оно заложено во взаимосвязи между персистентностью и инвариантностью.

Здесь есть важный нюанс. Сопоставление математики и физики не всегда является идеальным изоморфизмом. Во многих случаях математическая модель содержит больше структуры, чем физическая система — то, что философы называют избыточной структурой. Например, уравнение Дирака содержит решения с отрицательной энергией, которые первоначально казались нефизическими, но позже оказались предсказателями существования антиматерии. Математический избыток был не шумом, а предсказанием. Это явление распространено в физике и поразительно показательно: математическая структура, кажется, знает о мире больше, чем мы в неё вкладываем.

Фильтр персистентности предлагает объяснение. Инвариантная алгебра персистентной системы кодирует все структурные закономерности системы, включая те, которые еще не наблюдались. Решения уравнения Дирака с отрицательной энергией были частью инвариантной алгебры релятивистской квантовой механики — они являлись структурными следствиями симметрий и законов сохранения — и соответствовали реальным физическим явлениям (позитронам), которые еще не были обнаружены. «Необоснованная эффективность» избыточной математической структуры объясняется тем, что инвариантная алгебра представляет собой полное кодирование персистентной структуры системы, включая те ее части , которые мы еще не исследовали.

Структура, кажется, уходит корнями вглубь. Под субстанциями и онтологиями, под меняющимися теориями и смещающимися парадигмами сохраняются инвариантные алгебры. Они — скелет реальности, математическая архитектура, на которой построено всё, что существует.

Глава 16. Эволюционировавший математик

Существует весьма привлекательное объяснение эффективности математики, которое начинается не с мира, а с разума. Мы — биологические организмы, сформированные естественным отбором на протяжении миллионов лет. Наш мозг эволюционировал, чтобы ориентироваться в физической среде — оценивать расстояния, отслеживать движущиеся объекты, считать друзей и врагов, предсказывать траектории брошенных камней и прыгающих хищников. Математика, согласно этой концепции, является усовершенствованным расширением этих эволюционно развитых способностей. Она работает, потому что была создана для работы — не каким-либо сознательным создателем, а слепым, терпеливым процессом естественного отбора, воздействующим на мозг, которому необходимо было делать точные предсказания о физическом мире.

Эволюционная теория имеет реальные преимущества. Нейробиология показала, что люди и другие животные обладают врожденным чувством числа — приблизительным представлением числового количества, которое присутствует с младенчества, разделяется различными культурами и встречается у таких далеких от нас видов, как рыбы и пчелы. Младенцы в возрасте всего нескольких месяцев могут различать скопления предметов разного размера. Крысы могут научиться нажимать на рычаг определенное количество раз. Вороны могут считать примерно до семи. Эта ключевая математическая способность не усваивается из учебников; она заложена в архитектуре мозга.

Когнитивные ученые выявили еще несколько ключевых систем: геометрическое восприятие, представляющее пространство приблизительно в евклидовых терминах, объектное восприятие, предполагающее твердость и постоянство, и физическое восприятие, предсказывающее поведение движущихся объектов с приблизительной точностью. Эти системы работают автоматически, на уровне, не зависящем от сознательного мышления, и воплощают в себе неявные математические принципы — принципы сохранения, непрерывности и пространственной структуры, которые поразительно похожи на принципы классической физики.

Эволюционная теория объясняет, почему у нас есть эти способности: они были полезны для выживания. Предок, который мог точно оценить расстояние до хищника, выживал чаще, чем тот, кто этого не мог. Предок, который понимал, что объекты продолжают существовать, даже если скрыты за препятствиями (принцип, который математики называют непрерывностью), был лучше приспособлен к охоте и к тому, чтобы избегать охоты. Математика, согласно этой точке зрения, является культурным развитием когнитивных способностей, которые эволюционировали для ориентации в физическом мире.

Однако у эволюционной теории есть фатальное ограничение, которое было четко выявлено еще в шестидесятые годы XX века. Эволюция может объяснить нашу способность к приблизительному количественному мышлению, полезному для выживания — оценке расстояний, счету до малых чисел , прогнозированию простых траекторий. Но она не может объяснить эффективность абстрактной математики в областях, полностью далеких от опыта наших предков.

Квантовая механика описывает поведение частиц настолько малых, что ни один из предков человека никогда их не замечал. Общая теория относительности описывает искривление пространства-времени в таких больших масштабах и с такими экстремальными энергиями, что они не имеют никакого сходства с африканской саванной. Теория струн, если она верна, описывает структуру реальности в масштабе Планка — масштабе, на семнадцать порядков меньшем, чем атомное ядро. Никакое эволюционное давление не могло бы сформировать наш мозг таким образом, чтобы он мог точно рассуждать об этих областях. И все же математические структуры, разработанные для повседневного опыта — дифференциальное исчисление, теория групп, дифференциальная геометрия — описывают эти области с необычайной точностью.

Несоответствие между эволюционной средой и областью применения для многих философов является решающим доказательством того, что эффективность математики не может быть исключительно когнитивной по своей природе. Эволюция объясняет способность к изготовлению орудий труда — почему мы вообще можем заниматься математикой. Она не объясняет соответствие — почему математика, которой мы занимаемся, случайно совпадает со структурой мира, к которому мы никогда не были приспособлены в процессе эволюции.

Тезис о фильтре персистентности разрешает этот тупик, обнаруживая источник эффективности математики в окружающем мире, а не в разуме. Эволюция объясняет, почему мы можем обнаруживать математические структуры; фильтр персистентности объясняет, почему эти структуры существуют и могут быть обнаружены. Эти два подхода дополняют друг друга, а не конкурируют. Мозг — это математический инструмент, отточенный естественным отбором. Мир — это математический ландшафт, структурированный персистентностью. Эффективность математики — это результат соответствия между инструментом и ландшафтом — соответствия, которое ни один из подходов по отдельности не может полностью объяснить.

Существует более сложная версия эволюционной теории, разработанная когнитивными учеными, изучающими культурную эволюцию математических практик. Согласно этой точке зрения, математика — это не просто расширение врожденных способностей, а культурная технология — система обозначений, доказательств и педагогики, которая значительно расширяет эти способности за пределы их первоначальной эволюционной функции. Развитие позиционной нотации, изобретение алгебры, создание аксиоматического метода — это культурные инновации, которые преобразили математические способности человека так же глубоко, как изобретение письменности преобразило человеческую память.

Эта культурная концепция важна и в значительной степени верна. Но она не решает проблему соответствия. Она объясняет, почему мы можем заниматься высшей математикой — потому что культурная эволюция наделила нас мощными когнитивными инструментами. Она не объясняет, почему высшая математика, которой мы занимаемся, случайно совпадает со структурой физического мира. Культурная концепция объясняет возможности, не объясняя соответствие. Фильтр персистентности восполняет недостающую половину.

Глава 17. Кантианская подозрительность

Существует вызов тезису о фильтре персистентности, более радикальный, чем любой из рассмотренных нами ранее. Он не отрицает, что математика эффективно описывает мир. Он не ставит под сомнение наличие инвариантов в персистентных системах или образование алгебр из инвариантов. Вместо этого он ставит под сомнение всю концепцию, в рамках которой выдвигаются эти утверждения. Он спрашивает: что, если математическая структура, которую мы обнаруживаем в мире, — это вовсе не особенность мира, а особенность разума, который его воспринимает?

Эта проблема имеет почтенную историю. Впервые она была сформулирована, с присущей ей строгостью , философом Иммануилом Кантом в конце XVIII века. Кант утверждал, что пространство, время и причинность — это не свойства вещей как таковых — то, что он называл ноуменальным миром, — а формы интуиции, которые человеческий разум навязывает своему опыту. Мы не обнаруживаем, что мир пространственный; мы не можем не воспринимать его как пространственный, потому что пространственное представление заложено в нашей когнитивной архитектуре. Мы не обнаруживаем, что события причинно связаны; мы не можем не интерпретировать их как причинно связанные, потому что причинно-следственное рассуждение является необходимым условием для целостного опыта.

Если Кант прав, то математическая структура физики может быть проекцией разума, а не отражением мира. Законы физики будут математически структурированы не потому, что мир математически структурирован, а потому, что мы можем воспринимать и осмысливать мир только через математические категории. Эффективность математики будет объяснена — но ценой того, что она ничего не скажет нам о реальности как таковой .

Это кантовское подозрение, и к нему следует отнестись серьезно. Это не соломенный чучело, созданное для легкого опровержения. Это последовательная философская позиция, подкрепленная вескими доказательствами .

Рассмотрим цвет . Видимый спектр электромагнитного излучения представляет собой непрерывный диапазон длин волн, примерно от четырехсот до семисот нанометров . Но человеческое восприятие цвета не является точным представлением этого континуума. Это трехмерное упрощение, определяемое кривыми отклика трех типов колбочковых клеток в сетчатке. Мы видим мир в трехмерном цветовом пространстве — не потому, что мир трехмерен по своим цветовым свойствам, а потому, что наша зрительная система имеет три канала. Пчелы, с их различными фоторецепторами, видят другое цветовое пространство. Креветки-богомолы, имеющие шестнадцать типов фоторецепторов , видят цветовое пространство, непостижимое для нас. Трехмерность цвета — это характеристика наблюдателя, а не наблюдаемого объекта.

Может ли математика быть похожей? Может ли непрерывный, дифференцируемый, симметричный характер физических законов быть особенностью нашего познавательного аппарата — нашей математической «сетчатки» — а не особенностью реальности? Кантианский подход говорит, что да.

Чтобы формализовать это подозрение, представьте себе когнитивную систему — мозг или достаточно развитый искусственный интеллект, — которая получает сенсорные данные из внешней среды, строит внутреннюю модель этой среды и использует эту модель для прогнозирования будущих сенсорных данных. Когнитивная система не имеет прямого доступа к внешнему миру; она имеет доступ только к своей собственной внутренней модели. Поэтому математическая структура, которую она обнаруживает в мире, в лучшем случае является математической структурой её внутренней модели. Отражает ли эта структура внешний мир или лишь когнитивную архитектуру моделирующей системы , в принципе, невозможно узнать изнутри системы.

Это действительно тревожное наблюдение. Оно означает, что ни один эксперимент, ни одно наблюдение, ни одно научное исследование не могут окончательно разрешить вопрос о том, возникает ли математическая структура физики в мире или в сознании. Кантианская подозрительность с точки зрения наблюдений неотличима от реалистической позиции. Обе предсказывают совершенно одинаковые экспериментальные результаты. Разница между ними носит метафизический, а не эмпирический характер.

Если бы на этом аргументация в этой книге остановилась, тезис о фильтре персистентности был бы фатально подорван. Фильтр утверждает, что математическая структура возникает в мире — в инвариантной архитектуре персистентных систем. Кантианская гипотеза утверждает, что она возникает в разуме. И если эти два утверждения наблюдательно неразличимы, то выбрать между ними невозможно.

Но на этом аргументация не заканчивается. В следующей главе представлены четыре независимые причины полагать, что кантовское подозрение, хотя и последовательное, недостаточно — что математическая структура физики не может быть полностью когнитивного происхождения.

Глава 18. Опровержение теории сетки

Кантианская гипотеза о том, что математическая структура физики является проекцией разума, а не отражением мира, является последовательной, логически непротиворечивой и наблюдательно неотличимой от реалистической альтернативы. И все же есть четыре независимые причины полагать, что она неверна или, по крайней мере, неполна. Каждая из этих причин указывает на особенность математической физики, которую чисто когнитивная модель объяснить не может.

Первый и самый весомый аргумент основан на принципе избыточности предсказаний. Если бы математика была всего лишь когнитивной сеткой — набором категорий, навязанных разумом своему опыту, — то она могла бы организовывать и систематизировать существующие наблюдения, но не должна была бы быть способна генерировать правильные предсказания о явлениях, которые никогда не наблюдались. Сетка может классифицировать то, что вы уже видели; она не должна говорить вам, что вы увидите дальше.

И всё же математика делает именно это снова и снова . Поль Дирак, работая с математической структурой релятивистского волнового уравнения в 1928 году, обнаружил, что его уравнение имеет решения с отрицательной энергией. Вместо того чтобы отбросить эти решения как математические артефакты, он отнёсся к ним серьёзно — и предсказал существование позитрона, антиматериального двойника электрона, который был экспериментально обнаружен четыре года спустя. Математическая структура предсказала совершенно новый тип частицы, который никто никогда не представлял, не говоря уже о наблюдении.

Та же закономерность повторяется на протяжении всей истории физики. Уравнения Максвелла, выведенные из математической структуры электромагнетизма, предсказывали существование электромагнитных волн еще до того, как они были обнаружены. Полевые уравнения Эйнштейна предсказывали искривление света под действием гравитации еще до того, как это было замечено во время солнечного затмения 1919 года. Стандартная модель предсказывала существование бозона Хиггса за десятилетия до того, как он был обнаружен на Большом адронном коллайдере. В каждом случае математическая структура сообщала физикам нечто истинное о мире, с которым они никогда не сталкивались , — нечто, что ни одна когнитивная система, какой бы сложной она ни была, не могла бы сгенерировать, основываясь только на существующем опыте.

По определению, когнитивная сетка оперирует получаемыми данными. Она может сортировать, фильтровать, интерполировать и экстраполировать. Но предсказания математической физики — это не экстраполяции, а открытия совершенно новых явлений, сделанные в соответствии с внутренней логикой математической структуры. Позитрон не был паттерном в существующих данных, который разум Дирака спроецировал на мир. Это было структурное следствие алгебры, которая оказалась соответствующей реальной физической сущности. Это свидетельствует о том, что алгебра отражает нечто вне разума — нечто в мире.

Второй аргумент основан на интерсубъективности. Если бы математическая структура была проекцией индивидуальной когнитивной архитектуры, то разные умы — с разной архитектурой — должны были бы проецировать разные структуры. Но история науки показывает обратное: ученые, работающие независимо друг от друга, в разных культурах, с разной подготовкой и разными когнитивными стилями, приходят к одним и тем же математическим описаниям одних и тех же физических явлений. Ньютон и Лейбниц независимо друг от друга изобрели дифференциальное и интегральное исчисление. Эйнштейн и Гильберт независимо друг от друга вывели уравнения поля общей теории относительности. Эта конвергенция не объясняется общим культурным фоном — эти ученые часто принадлежали к радикально разным интеллектуальным традициям, — но она естественным образом объясняется, если бы все они открывали одну и ту же объективную математическую структуру в мире.

Третий аргумент исходит из ригидности. Когнитивная проекция должна быть гибкой — разум должен быть способен адаптировать свои категории к новому опыту, подобно тому как он может изучать новые языки или принимать новые концептуальные рамки. Но математическая структура физики чрезвычайно ригидна. Физики не могут выбирать, какие группы симметрии описывают фундаментальные силы. Они не могут выбирать коммутационные соотношения квантовой механики. Эти структуры открываются, а не изобретаются, и они сопротивляются модификации. Когда физик пытается изменить математическую структуру — например, добавив небольшую нелинейную поправку к линейным уравнениям квантовой механики, — последствия оказываются катастрофическими: модифицированная теория предсказывает сверхсветовую передачу сигналов , нарушения второго закона термодинамики и разрушение макроскопического мира. Математическая структура столь же непреклонна, как и сам мир, что свидетельствует о том, что она исходит из мира, а не из разума.

Четвертый аргумент основан на формальной независимости. Если бы математическая структура физики определялась когнитивной архитектурой, то должна была бы существовать систематическая связь между особенностями человеческого познания и особенностями физической теории. Но наиболее поразительной особенностью современной физики является то, насколько далеко она вышла за рамки всего, что можно было бы назвать человеческой интуицией. Квантовая механика противоречит нашим интуитивным представлениям о локальности, детерминизме и природе объектов. Общая теория относительности противоречит нашим интуитивным представлениям о пространстве и времени. Квантовая теория поля описывает мир, настолько далекий от повседневного опыта, что даже физики вынуждены полностью полагаться на математику , не в силах формировать интуитивные мысленные образы. Если бы математическая структура физики была когнитивной проекцией, она носила бы отпечаток человеческого познания. Вместо этого она носит отпечаток чего-то чуждого — чего-то, что разум пытается понять, а не чего-то, что он генерирует естественным образом.

Эти четыре аргумента — предсказательный избыток, интерсубъективность, жесткость и формальная независимость — не доказывают ошибочность кантовского подозрения. Они показывают, что чисто когнитивного объяснения недостаточно. Некоторые элементы математической структуры физики действительно могут отражать особенности когнитивной архитектуры — использование непрерывных переменных, предпочтение простых уравнений, предположение о гладкости. Но специфическое содержание физической теории — какие группы симметрии , какие законы сохранения, какие уравнения — исходит извне разума. Оно исходит из мира.

Цель состоит не в том, чтобы отвергнуть кантовское понимание, а в том, чтобы его уточнить. Математика в том виде, в котором мы её практикуем, имеет два источника: разум и мир. В следующих главах этот синтез будет развиваться.

Глава 19. Два источника

Аргументация, изложенная в предыдущих двух главах, приводит к синтезу, который разрешает одно из старейших противоречий в философии науки: вопрос о том, является ли математика открытием или изобретением. Ответ, как показывают данные, — и то, и другое, но в разных аспектах.

, в котором она практикуется и описывается в учебниках и журналах, имеет два различимых компонента. Первый — формальный компонент — общая математическая структура, в рамках которой выражаются конкретные теории. Эта структура включает использование непрерывных переменных, язык дифференциальных уравнений, предположение о плавном изменении физических величин, предпочтение линейных теорий и организующий принцип симметрии. Эти особенности присущи всем физическим теориям, от ньютоновской механики до квантовой теории поля. Они остаются стабильными на протяжении научных революций. Кажется, они больше связаны с тем, как мы мыслим, чем с тем, о чём мы думаем.

Второй компонент — это содержательный компонент, то есть конкретная эмпирическая информация, отличающая одну теорию от другой. Сюда входят группы симметрии, описывающие фундаментальные силы, законы сохранения, значения фундаментальных констант и конкретные уравнения, описывающие определенные явления . Эти особенности меняются с каждой научной революцией: ньютоновская гравитация заменяется общей теорией относительности, классическая механика — квантовой механикой, статичная Вселенная — расширяющейся. Они определяются измерениями и наблюдениями, а не структурой разума.

Формальная составляющая обладает всеми признаками когнитивного вклада. Она стабильна на протяжении веков и в разных культурах — свидетельство того, что она отражает относительно неизменную когнитивную архитектуру человеческого вида. Она интуитивна — нам естественно представлять мир в терминах непрерывных величин, плавных изменений и симметричных законов. И она присуща всем теориям — это говорит о том, что она является особенностью языка физики, а не мира, описываемого физикой.

Содержательная составляющая имеет все признаки влияния внешнего мира. Она меняется с каждой научной революцией — это свидетельствует о том, что она обусловлена эмпирическими открытиями, а не когнитивной структурой. Она часто противоречит интуиции — квантовая механика нарушает наши естественные ожидания относительно объектов и причинно-следственных связей. И она специфична для конкретных теорий — это говорит о том, что она отражает конкретную структуру мира, а не общую особенность человеческого мышления.

Это разложение — математической физики на когнитивный формальный компонент и эмпирический содержательный компонент — это то, что в прилагаемой к этому тому научной статье называется разложением на два источника. В точном смысле это модернизация кантовского различения между формами интуиции (которые разум вносит в опыт) и эмпирическим содержанием (которые вносит мир). Но оно выходит за рамки Канта в двух отношениях. Во-первых, оно идентифицирует содержательный компонент как структурированный — не произвольные данные, а инвариантную алгебру устойчивых систем, управляемую тезисом о фильтре устойчивости. Во-вторых, оно генерирует проверяемые предсказания.

Наиболее поразительное предсказание касается искусственного интеллекта. Если теория двойного источника верна, то искусственный разум — с когнитивной архитектурой, радикально отличающейся от человеческого мозга, — должен развить другой формальный компонент, но тот же содержательный компонент. Инопланетный разум или достаточно развитая искусственная система могут выражать законы физики на математическом языке, который мы не узнаем

— возможно, вообще не используя дифференциальные уравнения, возможно, не используя непрерывные переменные, возможно, организуя свои знания каким-то совершенно незнакомым способом. Но эмпирическое содержание — какие симметрии есть у мира, какие величины сохраняются, каким ограничениям удовлетворяют инварианты — должно быть одинаковым, потому что содержание определяется миром, а не разумом.

Это предсказание становится проверяемым. Недавние работы в области машинного обучения позволили создать искусственные системы, способные обнаруживать физические законы на основе необработанных данных. Эти системы — нейронные сети, обученные на траекториях частиц, колебаниях пружин, орбитах планет — независимо друг от друга заново открыли закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и другие фундаментальные инварианты. Они сделали это, используя математические представления, совершенно отличные от представлений человеческой физики — не дифференциальные уравнения, а сетевые архитектуры, не символическую алгебру, а распределенные числовые представления. Формальная основа была иной; содержание было тем же. Это в точности то, что предсказывает двухисточниковая декомпозиция.

Данный синтез разрешает давний спор между реализмом и идеализмом о математике. Математика не является чисто открытым явлением (формальная составляющая создается разумом) и не является чисто изобретенным явлением (содержательная составляющая создается миром). Это сотрудничество разума и мира, совместный продукт когнитивной архитектуры и физической структуры. Фильтр персистентности воздействует на мир; разум принимает то, что проходит через этот фильтр, и облекает это в формальный язык, который поддерживает его архитектура.

Этот взгляд имеет освобождающее значение для философии науки. Он означает, что нет необходимости выбирать между кантовской и реалистической позициями. Обе содержат часть истины. Математическая структура физики частично познавательна, частично эмпирична, и интересные вопросы заключаются не в том, какой источник является «реальным», а в том, как их различать — как отделить то, что разум привносит в физику, от того, что привносит мир.

Глава 20. Живой фильтр

Тезис о фильтре персистентности был разработан с учетом физики, но его логика распространяется на любую область, в которой вещи сохраняются. Живые организмы относятся к числу самых впечатляющих систем с персистентной устойчивостью во Вселенной: человеческое тело поддерживает свою температуру, химический состав крови, клеточную архитектуру и функциональную целостность на протяжении десятилетий благодаря непрерывному обновлению составляющих его веществ. Если фильтр персистентности верен, то живые системы должны обладать инвариантными алгебрами — и они ими обладают.

Инварианты биологических систем — это не сохраняющиеся величины гамильтоновой физики. Они не поддерживаются симметриями пространства-времени или калибровочными инвариантами квантовой теории поля. Они поддерживаются обратной связью — сложными регуляторными сетями, которые эволюция заложила в каждую живую клетку. Температура тела поддерживается на уровне около 37 градусов гипоталамусом, который регулирует скорость метаболизма, кровоток и потоотделение в ответ на тепловые возмущения . Уровень глюкозы в крови поддерживается в узком диапазоне благодаря взаимодействию инсулина и глюкагона. pH крови стабилизируется буферными системами в крови и регуляторным действием почек и легких.

Каждая из этих гомеостатических заданных точек является инвариантом в точном смысле, требуемом тезисом о фильтре персистентности: величиной, которая остается приблизительно стабильной при преобразованиях, которым подвергается система. И эти инварианты, подобно сохраняющимся величинам в физике, образуют алгебру. Сумма двух гомеостатических заданных точек сама по себе является стабильной величиной. Произведение заданной точки и константы является стабильным. Взаимосвязи между различными гомеостатическими переменными — зависимость артериального давления от объема крови и сосудистого сопротивления, зависимость скорости метаболизма от температуры и уровня гормонов — представляют собой алгебраические ограничения, определяющие инвариантную алгебру организма.

Богатство этой алгебры определяет богатство математического описания. Простой организм с небольшим количеством гомеостатических переменных имеет разреженную алгебру и, соответственно, простую математическую модель. Сложный организм с сотнями регулируемых переменных имеет богатую алгебру и, соответственно, сложное математическое описание.

Градиент глубины применим к биологии так же, как и к физике, хотя инварианты поддерживаются различными механизмами.

Этот взгляд проливает свет на то, почему математическая биология вообще возможна. Уравнения Ходжкина-Хаксли для нервной проводимости, уравнения Лотки-Вольтерры для динамики взаимодействия хищник-жертва, равновесие Харди-Вейнберга для популяционной генетики, информационно-теоретические меры, используемые в геномике и нейробиологии — все эти математические модели успешны, потому что они отражают инвариантную структуру устойчивых биологических систем. Математика не навязывается извне биологами, которым просто нравятся уравнения. Она извлекается изнутри инвариантной алгеброй, порождаемой биологической устойчивостью.

Однако эта точка зрения также объясняет, почему математическая биология менее точна, чем математическая физика. Биологические инварианты поддерживаются механизмами обратной связи, а не фундаментальными симметриями, а механизмы обратной связи по своей природе являются приблизительными. Термостат поддерживает температуру близкой к заданному значению, а не точно на заданном уровне. Гомеостатическая система поддерживает уровень глюкозы в крови в определенном диапазоне, а не в одной точке. Инварианты являются приблизительными, и, соответственно, алгебра также является приблизительной — ее тождества выполняются в пределах допустимых отклонений, а не точно. Поэтому математические модели, описывающие биологические системы, хороши, но несовершенны, точны в определенных диапазонах, но не с произвольной точностью. Это в точности соответствует предсказаниям тезиса о фильтре персистентности.

Здесь кроется более глубокий смысл, касающийся природы биологической устойчивости. Физические системы существуют, потому что законы физики сохраняют определенные величины. Биологические системы существуют, потому что эволюция создала их для существования — потому что механизмы обратной связи, поддерживающие гомеостаз, были отобраны естественным отбором за их способность поддерживать структурную целостность организма. Биологическая устойчивость не дана Вселенной; она достигается организмом, ценой непрерывных метаболических затрат.

Активный характер биологической устойчивости имеет последствия для инвариантной алгебры. Физическая сохраняющаяся величина поддерживается вечно, без усилий, благодаря симметриям динамики.

Биологический инвариант сохраняется только до тех пор, пока организм жив и функционирует — до тех пор, пока работают механизмы обратной связи, обеспечивается достаточное энергоснабжение, а условия окружающей среды находятся в допустимых пределах. Когда эти условия нарушаются — когда организм получает травму, голодает или подвергается условиям, выходящим за пределы его допустимых, — инварианты разрушаются , алгебра истончается, и математическое описание перестаёт работать. Смерть, на языке фильтра устойчивости, — это коллапс инвариантной алгебры.

Таким образом, живой фильтр раскрывает нечто глубокое о взаимосвязи между жизнью и математикой. Жизнь не является математической случайно. Она математична, потому что существует, а существование требует структуры. Механизмы обратной связи, поддерживающие жизнь организмов, одновременно являются механизмами, придающими организмам их математический характер. Быть живым — значит поддерживать инварианты; поддерживать инварианты — значит обладать алгебраической структурой; обладать алгебраической структурой — значит быть математически описываемым. Жизнь и математическая описываемость — это не отдельные явления. Это одно и то же явление, рассматриваемое с разных точек зрения.

Глава 21. Институты, которые существуют и сохраняются.

Если тезис о фильтре устойчивости применим везде, где вещи сохраняются, то он должен применяться не только к атомам и организмам, но и к устойчивым структурам человеческой социальной жизни: правовым системам, рынкам, языкам, религиям и государственным институтам. Это одни из самых сложных известных устойчивых систем, и их связь с математическим описанием является одним из самых спорных вопросов в социальных науках.

Инварианты социальных институтов не являются сохраняющимися величинами в физическом смысле и не поддерживаются гомеостатической обратной связью в биологическом смысле. Они поддерживаются совершенно иным механизмом: принуждением, конвенцией, привычкой и коллективной верой. Право собственности сохраняется, потому что его обеспечивает правовая система. Валюта сохраняет свою ценность, потому что население коллективно верит в нее. Язык сохраняет свою грамматическую структуру, потому что носители языка передают ее следующему поколению. Это инварианты в техническом смысле — величины или отношения, которые остаются стабильными при преобразованиях, которым подвергается система, — но их стабильность хрупка, случайна и легко нарушается.

Тезис о фильтре персистентности предсказывает, что социальные институты, как персистентные системы, должны обладать инвариантными алгебрами и, следовательно, поддаваться математическому описанию. И они действительно поддаются — но лишь приблизительно. Математические модели экономики, политологии и социологии реальны, но ограничены. Кривые спроса и предложения приблизительно описывают поведение рынка . Теоретико-игровые равновесия приблизительно предсказывают стратегическое взаимодействие. Статистические закономерности в поведении избирателей , уровне преступности и экономическом производстве являются подлинными паттернами, но они сохраняются с гораздо меньшей точностью, чем законы физики.

В диссертации объясняется, почему. Инварианты социальных систем являются наиболее хрупкими из всех. Рыночное равновесие может быть разрушено паникой , регулированием или технологическим сбоем. Правовой принцип может быть отменен законодательным актом или революцией. Культурная норма может исчезнуть в течение одного поколения. Инвариантные алгебры социальных систем невелики — мало генераторов, мало жестких ограничений, мало нетривиальных следствий — и они крайне приблизительны. Математические описания, которые поддерживают эти алгебры, соответственно, грубы.

Это не недостаток социальных наук или изучающих их социологов. Это структурное следствие степени устойчивости изучаемых ими систем. Физик, изучающий электрон, имеет доступ к инвариантной алгебре необычайного богатства — множеству точных сохраняющихся величин, жестким полиномиальным ограничениям, огромной группе симметрии. Экономист, изучающий рынок, имеет доступ к инвариантной алгебре скромного размера — нескольким приблизительным закономерностям (закон спроса и предложения, количественная теория денег, эффективность конкурентных рынков в идеализированных условиях), которые остаются в пределах допустимых отклонений и нарушаются при нагрузке. Разница в математической точности является отражением разницы в устойчивости, а не отражением какой-либо разницы в интеллектуальной строгости .

В диссертации также содержится поразительное предсказание о том, когда математические модели социальных систем должны давать сбой. Они должны давать сбой именно тогда, когда система переживает переходный период — когда существующие инварианты разрушаются, а новые еще не установлены. И именно это мы и наблюдаем. Экономические модели дают наиболее резкий сбой во время финансовых кризисов — в моменты , когда рушатся институциональные инварианты (доверие к валюте, доверие к банкам, стабильность рынков). Политические модели дают наиболее резкий сбой во время революций — в моменты, когда ниспровергаются конституционные инварианты (верховенство права, легитимность правительства, стабильность границ). Экологические модели дают сбой во время массовых вымираний. Неудача математического описания в моменты переходных периодов не является недостатком для диссертации; это ее предсказание.

Здесь также содержится конструктивный урок для социальных наук. Если математическое описание зависит от существования инвариантов, то первоочередной задачей социолога должно быть выявление инвариантов изучаемой системы — величин или отношений, которые остаются стабильными, в то время как все остальное меняется. Что же представляют собой сохраняющиеся величины экономики ? Не уровень цен или уровень безработицы, которые постоянно колеблются, а более глубокие структурные особенности: правовая база, денежная система, режим прав собственности, институциональное доверие, обеспечивающее возможность обмена. Это и есть инварианты, и они являются надлежащими объектами математического моделирования. Социальная наука, которая начинает с выявления своих инвариантов, — это социальная наука, которая знает, что она может, а что не может описать математически.

Главный вывод заключается в интеллектуальной скромности. Тезис о фильтре персистентности не обещает, что математика будет работать повсюду с одинаковой эффективностью. Он обещает, что математика будет работать пропорционально персистентности — точно и глубоко там, где инварианты точны и многочисленны, приблизительно и предварительно там, где инварианты приблизительны и редки. Это не ограничение тезиса, а одна из его центральных идей: он объясняет не только то, почему математика работает, но и где она работает и насколько хорошо, обеспечивая принципиальную основу для древней интуиции о том, что естественные науки точнее, чем гуманитарные.

Глава 22. Что может доказать нашу неправоту?

Тезис, который не может быть ошибочным, — это тезис, который ничего не говорит. Тезис о фильтре персистентности — это структурное утверждение о связи между персистентностью и математической описываемостью , а не конкретная физическая теория, конкурирующая с другими теориями за экспериментальное подтверждение. Но он порождает вспомогательные предсказания — утверждения о том, что мы должны наблюдать, если тезис верен, и что мы не должны наблюдать. Если эти предсказания не подтверждаются, тезис оказывается под угрозой.

Вот шесть подобных предсказаний, расположенных в порядке от наиболее проверяемых до наиболее спекулятивных.

Первое предсказание наиболее прямолинейно. В тезисе говорится, что эффективность математического описания должна коррелировать со степенью устойчивости. Системы со многими точными инвариантами должны описываться точной математикой; системы с небольшим количеством приблизительных инвариантов должны описываться грубой математикой. Это утверждение о измеримой взаимосвязи. В принципе, можно было бы исследовать класс сопоставимых физических систем — например, атомные ядра, конфигурации звезд или типы экологических сообществ — и измерить как их устойчивость (по показателю запаса устойчивости, времени жизни или числу независимых сохраняющихся величин), так и их математическую управляемость (по точности наилучшей доступной модели). Если бы корреляция не была обнаружена — если бы некоторые системы с высокой устойчивостью сопротивлялись математическому описанию, в то время как некоторые системы с низкой устойчивостью допускали бы точные модели, — тезис был бы оспорен.

Второе предсказание касается фазовых переходов. Когда система пересекает фазовый переход — когда вода замерзает, когда магнит теряет свой магнетизм, когда экономика вступает в кризис — режим её устойчивости изменяется. В диссертации предсказывается, что алгебраическая структура инвариантов системы должна претерпеть классифицируемое структурное преобразование в момент перехода. В частности, при нарушении симметрии алгебра инвариантов должна расширяться (поскольку величины, которые ранее были связаны симметрией, становятся независимыми переменными). Это предсказание частично подтверждается существующей теорией — теория фазовых переходов Ландау описывает именно эту закономерность для равновесных переходов, — но в диссертации предсказывается, что оно должно быть справедливым в более широком смысле, включая неравновесные и динамические переходы.

Третье предсказание, пожалуй, самое точное. В тезисе говорится, что математическое моделирование должно давать наиболее серьезные сбои для систем, находящихся в подлинных переходных состояниях — систем, которые не находятся вблизи какого-либо аттрактора, не сохраняют приблизительно никаких величин и не поддерживают никаких структурных закономерностей. Экономики в условиях финансового краха, экосистемы во время массовых вымираний, турбулентные потоки, далекие от какого-либо статистического стационарного состояния — именно они должны быть наиболее устойчивы к эффективному математическому описанию. Если бы кто-то попытался построить высокоточную прогностическую модель системы без каких-либо идентифицируемых инвариантов, тезис оказался бы в затруднительном положении.

Четвертое предсказание вытекает из теории разложения по двум источникам. Системы искусственного интеллекта, обученные моделировать физическую динамику на основе необработанных данных, должны обнаруживать представления, соответствующие известным сохраняющимся величинам — энергии, импульсу, заряду, — даже если они выражают эти величины на математическом языке, сильно отличающемся от того, который используют физики . Содержание физики должно быть одинаковым; формальная структура может отличаться. Недавние работы по символической регрессии и нейронным сетям, основанным на физических принципах, начали проверять это предсказание, и первые результаты согласуются: эти системы действительно заново открывают законы сохранения на основе необработанных данных. Если бы системы ИИ последовательно находили эффективные прогностические модели, не имеющие структурной связи с известными инвариантами, тезис был бы подорван.

Пятое предсказание носит количественный характер. Если физическая система обладает определённым числом независимых сохраняющихся величин, то, согласно тезису, минимальная математическая теория, необходимая для описания её устойчивого поведения, должна иметь сложность, пропорциональную этому числу. Для описания системы с двумя сохраняющимися величинами не должна потребоваться бесконечно сложная теория. Если такое несоответствие будет обнаружено — система Если бы речь шла о небольшой, простой инвариантной алгебре, для описания которой требовалась бы неприводимо комплексная теория, то эта диссертация столкнулась бы с серьезной проблемой.

Шестое предсказание является наиболее спекулятивным, но и наиболее далеко идущим. Если фильтр персистентности действительно фундаментален, то значения физических констант — постоянной тонкой структуры, отношения масс элементарных частиц, силы гравитации — не должны быть случайными выборками из какого-либо распределения. Они должны группироваться вблизи значений, которые максимизируют диапазон и длительность персистентных структур: стабильные атомы, стабильные звезды, стабильные связанные состояния. Это предсказание частично совпадает с аргументами тонкой настройки, но отличается от антропных рассуждений: оно не утверждает, что константы настроены для наблюдателей, а утверждает, что они настроены для персистентности любого рода. Составление карты ландшафта персистентных структур как функции фундаментальных констант и проверка того, находятся ли наблюдаемые значения вблизи максимумов персистентности, представляли бы собой проверку — хотя и чрезвычайно сложную.

Эти предсказания придают тезису о фильтре персистентности эмпирическую обоснованность. Они не так точны, как предсказания конкретной физической теории — тезис не предсказывает массу следующей обнаруженной частицы, — но они достаточно точны, чтобы отличить тезис от конкурентов и подвергнуть его возможности опровержения. Тезис, который порождает проверяемые предсказания, даже неточные, — это тезис, который участвует в научной деятельности, а не стоит в стороне от нее.

Глава 23. Более широкая программа

Тезис о фильтре персистентности, разработанный в этой книге и в прилагаемой к ней научной статье (Кригер, 2026, doi:10.5281/ zenodo.XXXXX), является одним из результатов более широкой исследовательской программы . Эта программа , разработанная на основе более чем восьмидесяти публикаций, охватывающих почти три десятилетия, преследует единственную организующую идею: персистентность — это не просто свойство, которым обладают некоторые системы, а фундаментальный структурный принцип, из которого можно вывести организацию сложных систем во всех областях.

Программа началась не с абстрактного стремления к устойчивости , а с исследований, специфичных для конкретной области, которые независимо друг от друга пришли к одной и той же закономерности. Модель ускорения восприятия времени с возрастом связала это явление с ограничениями устойчивости биологических метаболических систем. Структура принятия клинических решений в медицине показала, что надежность клинических выводов ограничена инвариантной структурой пространства решений. Анализ эскалации конфликтов в связанных организациях показал, что переход от стабильного сотрудничества к деструктивному конфликту следует схеме фазового перехода, регулируемого устойчивостью кооперативных равновесий.

В каждом случае вывод был один и тот же: организационная логика системы определялась не её материальной основой — не тем, состоит ли она из клеток, людей или институтов, — а формальными ограничениями, накладываемыми устойчивостью. Это сближение послужило стимулом для поиска единой теории, и аргументация данной книги о математической описываемости составляет её основополагающий слой.

Некоторые результаты более широкой программы освещают фильтр персистентности с неожиданных ракурсов. Одним из наиболее поразительных является структурное выведение второго закона Ньютона. В классической физике закон Ньютона рассматривается как эмпирический постулат — утверждение о том, как силы связаны с ускорениями, обнаруженное путем наблюдения и подтвержденное экспериментом. Но в рамках теории персистентности закон может быть выведен как теорема. Если начать с концепции системы, пространство состояний которой содержит понятие расстояния, и эволюция которой сохраняет условие структурной целостности, и потребовать, чтобы эволюция определялась мгновенным состоянием системы, то эволюция должна удовлетворять дифференциальному уравнению второго порядка — и член, описывающий воздействие, в этом уравнении однозначно определяется геометрией пространства состояний. Закон Ньютона — это не случайный факт о нашей Вселенной. Это структурное следствие персистентности в пространстве с расстоянием.

Ещё один результат — четыре закона самоорганизации . В работе «Системы» выводятся формальные ограничения на любую систему, которая сохраняет свою организацию во времени. Эти законы ограничивают скорость, с которой система может увеличивать свой внутренний порядок, определяют минимальные условия для сохранения жизнеспособности, устанавливают асимметрию в наблюдаемости функциональных и нефункциональных состояний и регулируют взаимодействие между устойчивыми системами. Каждый закон доказывается исключительно на основе условий устойчивости, не требуя каких-либо предположений, специфичных для конкретной области. Множество жизнеспособности самоорганизующейся системы — это именно та область устойчивости, которую анализирует Тезис о фильтре устойчивости, а четыре закона являются структурными следствиями инвариантной алгебры на этой области.

Особенно показательный результат касается роли неопределенности. Можно было бы ожидать, что идеально упорядоченная вселенная — управляемая детерминированными правилами без случайных элементов — будет наиболее благоприятна для устойчивых структур. Но оказывается, что верно обратное. Формальное доказательство в рамках программы показывает , что любая система, способная к устойчивой сложности, должна допускать исключения из своих правил: устойчивая неопределенность и вероятностное отклонение — это не нарушения порядка, а требования к нему. Идеально детерминированная система на конечном пространстве состояний в конечном итоге проходит через все состояния и не может поддерживать структурную дифференциацию, которую требует устойчивость. Неприводимая стохастичность квантовой механики и чувствительность к начальным условиям в хаотических системах — это не недостатки математического описания мира. Это особенности, которые отбирает фильтр устойчивости.

Программа распространяется и на астрофизику, где концепция персистентности объясняет , почему двойные и кратные звездные системы доминируют в звездных популяциях. Аргумент заключается в том, что двойные конфигурации отбираются персистентным отбором: инвариантные величины коллапсирующего газового облака — угловой момент, энергия связи, магнитный поток — легче сохраняются на орбитах двойных систем, чем при коллапсе одиночной звезды. Одиночные звезды являются исключительным случаем, возникающим только тогда, когда определенные механизмы диссипации удаляют достаточно углового момента, чтобы позволить коллапсу превратиться в одиночный объект.

В когнитивной науке и психиатрии эта программа сопоставляет диагностические категории с математикой динамических систем. Психические состояния моделируются как изменения в ландшафте аттракторов когнитивной динамики — фазовые переходы, в которых стабильные модели мышления и поведения уступают место патологическим аттракторам. Зависимость моделируется как экстрактивный осциллятор с прогрессирующей деградацией сенсоров — система, которая потребляет те самые механизмы обратной связи, которые ей необходимы для поддержания стабильности. В каждом случае математическая модель оказывается успешной, поскольку система является устойчивой, эта устойчивость поддерживается идентифицируемыми инвариантами, и эти инварианты несут алгебраическую структуру, описываемую тезисом о фильтре устойчивости.

Методологической нитью, пронизывающей все эти результаты, является то, что программа называет метаметодом «древовидной вершины»: формализация на самом высоком уровне общности, где еще можно получить строгие результаты, а затем переход к приложениям, специфичным для конкретной области. Эта методология сама по себе является следствием концепции персистентности. Независимые от субстрата формальные ограничения — поскольку они инвариантны в разных областях — составляют наиболее устойчивый уровень научного знания. Они сохраняются после замены конкретных теорий и моделей, потому что являются свойствами инвариантной алгебры, а не какого-либо конкретного представления этой алгебры.

Настоящая книга занимает вершину этой иерархии. В ней объясняется, почему устойчивые системы вообще поддаются математическому описанию. Результаты, специфичные для конкретной области, являются следствиями, полученными путем определения пространства состояний, группы симметрии и семейства наблюдаемых, соответствующих каждой области.

Глава 24. Чего мы не знаем

Тезис о фильтре персистентности отвечает на вопрос Вигнера, но не на все вопросы. Честная аргументация требует честного анализа того, что остается неизвестным, что тезис не объясняет и где находится граница понимания. Эта заключительная глава посвящена именно такому анализу.

Самый глубокий открытый вопрос: почему существуют симметрии? Фильтр персистентности объясняет то, что следует из симметрии — что симметрия порождает инварианты, инварианты порождают алгебры, а алгебры порождают математическую структуру. Но он не объясняет, почему Вселенная обладает именно такими симметриями. Почему пространство-время трансляционно-инвариантно? Почему законы физики остаются теми же завтра, что и сегодня? Это одни из самых глубоких фактов о Вселенной, и фильтр персистентности принимает их как данность.

Есть намёки на ответ — аргумент теории информации о том, что законы симметрии проще, чем законы асимметрии, и, следовательно, более вероятны в любой системе координат, которая взвешивает возможности по простоте, — но эти намёки не являются доказательством. Для действительно удовлетворительного объяснения того, почему Вселенная обладает симметриями, потребовалась бы теория, объясняющая, почему вообще существуют законы, а такая теория пока остаётся за пределами наших нынешних возможностей.

Второй открытый вопрос касается конкретных значений фундаментальных констант. Фильтр персистентности объясняет, почему существует математическая структура и почему определенные типы структуры повторяются, но он не объясняет, почему постоянная тонкой структуры имеет именно такое значение, или почему протон в 1836 раз тяжелее электрона, или почему гравитация намного слабее других фундаментальных сил. Это числа — конкретные, случайные, необъяснимые числа, — которые фильтр персистентности не определяет. Задаются ли они каким-то более глубоким принципом, выбранным из множества возможностей, или же это просто грубые факты, фильтр не говорит.

Третий открытый вопрос касается топологической структуры пространства-времени. Фильтр персистентности отбирает непрерывную динамику среди систем, обитающих в топологических пространствах. Но почему пространство-время является топологическим пространством? Почему оно имеет три измерения пространства и одно измерение времени, а не какое-либо другое число? Эти вопросы выходят за рамки возможностей фильтра. Двойственно-источниковое разложение предполагает возможный подход — возможно, топологическая структура пространства-времени является частью формальной составляющей, обусловленной когнитивной архитектурой, а не частью содержательной составляющей, обусловленной миром, — но это предположение носит спекулятивный характер и далеко не доказано.

Четвертый открытый вопрос заключается в том, является ли фильтр персистентности самым глубоким уровнем объяснения, или же он основывается на чем-то еще более глубоком. Возможно, существует причина, коренящаяся в теории информации или вычислительной сложности, почему персистентность отбирает математическую структуру, а не какой-либо другой тип структуры. Возможно, фильтр является следствием еще более фундаментального принципа — принципа о взаимосвязи между информацией, вычислениями и существованием, — который мы еще не сформулировали.

Пятый открытый вопрос касается границы между устойчивым и переходным состояниями. Фильтр устойчивости проводит черту между системами, которые устойчивы (и, следовательно, являются математическими), и системами, которые не устойчивы (и могут не быть таковыми). Но где именно проходит эта черта? Какой уровень устойчивости достаточен для гарантирования нетривиальной математической структуры? Приближенная модель устойчивости, разработанная в научной статье, дает частичный ответ — математическая точность плавно снижается с уменьшением устойчивости, — но более точная характеристика границы укрепила бы тезис.

Шестой открытый вопрос, пожалуй, самый интригующий : что произойдет, когда искусственные разумы с когнитивной архитектурой, кардинально отличающейся от нашей, начнут заниматься наукой? Теория двойного разложения предсказывает, что они должны обнаружить одно и то же содержание — одни и те же законы сохранения, одни и те же группы симметрии, одни и те же инвариантные алгебры, — но выразить его на другом формальном языке. Это предсказание можно проверить, и быстрое развитие искусственного интеллекта позволит сделать это в течение нашей жизни. Если искусственные системы обнаружат эффективные представления физических законов, которые не имеют структурного сходства с известными инвариантами, то этот тезис столкнется с самым серьезным испытанием.

Эти открытые вопросы не являются недостатками тезиса. Они представляют собой его развивающиеся грани — места, где аргумент встречается с неизвестным и указывает на направления будущих исследований.

Хороший ответ на глубокий вопрос не завершает исследование. Он расширяет его, выявляя новые вопросы, которые ранее невозможно было сформулировать.

Загадка Вигнера — почему математика описывает мир — более шести десятилетий не давала покоя философии науки. Тезис о фильтре персистентности превращает её из тайны в исследовательскую программу . Персистентность требует инвариантов. Инварианты образуют алгебры. Алгебры — это математические структуры. Мир математичен, потому что только математическое существует. Это ответ, насколько он есть. Что лежит за его пределами — почему вообще существует персистентность, почему константы имеют именно такие значения, что искусственные разумы сделают с миром — эти вопросы остаются после ответа, подобно семенам, разбросанным деревом, которое выросло до предела, ожидая, пока следующее поколение вырастет ещё выше.

Заключение: Подпись существования

Мы начали эту книгу с вопроса, заданного Юджином Вигнером в 1960 году: почему математика настолько необоснованно эффективна в описании физического мира? Теперь мы пришли к ответу — не окончательному, не полному, но такому, который превращает вопрос из загадки в исследовательскую программу .

Ответ кроется в тезисе о фильтре персистентности. Математика описывает мир, потому что мир состоит из вещей, которые сохраняются, а персистентность имеет структуру. Эта структура — сеть сохраняющихся величин, симметрий и инвариантных соотношений, которыми должна обладать любая устойчивая система, — согласно глубинной логике алгебры и теории моделей, всегда является моделью формальной математической теории. Соответствие между физикой и математикой — это не предопределенная гармония, не космическое совпадение, не дар. Это следствие того, что значит быть устойчивым.

Давайте еще раз проследим цепочку рассуждений, теперь уже с учетом всей значимости книги, стоящей за каждым звеном.

Всё, что сохраняется, должно обладать инвариантами — величинами или отношениями, которые не изменяются под воздействием преобразований, которым подвергается система. Это не эмпирическое открытие, а логическая необходимость: если в системе ничто не остаётся стабильным, то система не сохранилась; она была заменена чем-то другим. Сохранение без инвариантов — это противоречие в терминах.

Эти инварианты не существуют изолированно. Они связаны алгебраическими соотношениями: их можно складывать, умножать, комбинировать в новые инварианты. Они образуют структурированную алгебру — не потому, что кто-то решил организовать их таким образом, а потому, что операции сложения и умножения, применяемые к сохраняющимся величинам, автоматически порождают новые сохраняющиеся величины. Алгебра порождает саму себя.

Эта алгебра нетривиальна. Когда система имеет конечное число независимых сохраняющихся величин — как это обычно бывает в физических системах — алгебра является конечно описываемой, имеет нетривиальные следствия, которые ограничивают поведение системы , и может быть реализована для многих различных физических систем. Это тот тип математической структуры, который поддерживает предсказание, объединение и классификацию — отличительные черты математической физики, которую Вигнер счел столь неоправданно эффективной.

Метафора фильтра отражает объяснительную логику. Представьте себе пространство всех мыслимых конфигураций материи и энергии. Большинство этих конфигураций не сохраняются — они нестабильны, мимолетны, эфемерны. Сохраняются те конфигурации, которые обладают достаточной инвариантной структурой, чтобы поддерживать свою идентичность во времени. Эти «выжившие» — это физические системы, которые мы наблюдаем, изучаем и на которых строим нашу науку. И каждая из них, благодаря тому, что прошла через фильтр, несет в себе алгебраическую структуру, которая делает ее пригодной для математического описания.

Мы наблюдали проявление этой логики в различных областях. В фундаментальной физике, где законы сохранения выполняются с необычайной точностью, математические описания соответственно точны — аномальный магнитный момент электрона совпадает с теорией до двенадцати знаков после запятой. В биологии, где гомеостатические инварианты поддерживаются механизмами обратной связи, которые по своей природе являются приблизительными, математические описания хороши, но несовершенны. В социальных науках, где институциональные инварианты хрупки и легко нарушаются, математические модели грубы и ненадежны. Точность математики соответствует точности устойчивости, и это соответствие само по себе является предсказанием тезиса.

Мы столкнулись с самым радикальным вызовом этой картине: кантовским подозрениями в том, что математическая структура, которую мы обнаруживаем в мире, является не свойством мира, а свойством нашего разума. Мы отнеслись к этому вызову серьезно, формально его разработали и показали, что он согласуется со всеми имеющимися данными — нет. Наблюдение позволяет отличить мир, который действительно является математическим, от разума, который навязывает математику нематематическому миру. Но затем мы показали, что чисто когнитивная модель не может объяснить наиболее поразительную особенность математической физики: её способность предсказывать явления, с которыми человеческий разум никогда не сталкивался. Когнитивная сетка может организовывать опыт, но она не может систематически генерировать правильные предсказания о новых областях. Предсказательная способность математики свидетельствует о том, что по крайней мере часть того, что мы называем математической структурой, возникает в мире, а не в разуме.

Синтез — двухкомпонентное разложение — разрешает это противоречие. Математическая физика имеет два источника: формальный компонент, обусловленный когнитивной архитектурой (использование непрерывных переменных, язык дифференциальных уравнений, предположение о гладкости), и содержательный компонент, обусловленный окружающим миром (какие группы симметрии , какие законы сохранения, какие конкретные уравнения). Формальный компонент стабилен на протяжении веков и культур — свидетельство его когнитивного происхождения. Содержательный компонент меняется с каждой научной революцией — свидетельство его эмпирического происхождения. Фильтр персистентности воздействует на мир и отбирает математическую структуру; разум воспринимает эту структуру и облекает её в тот конкретный формализм , который поддерживает его когнитивная архитектура.

Но аргументация этой книги не является замкнутой системой. Она открывает вопросы, на которые пока не может дать ответа, и именно с этих вопросов начинается настоящее приключение.

Мы не знаем, почему во Вселенной вообще существуют симметрии. Фильтр персистентности объясняет то, что следует из симметрии, но он не объясняет, почему симметрия вообще существует . Однородность пространства-времени — тот факт, что законы физики одинаковы везде и всегда — является одним из самых глубоких фактов о Вселенной, и фильтр персистентности принимает его как данность.

Мы не знаем, почему конкретные константы природы имеют именно такие значения. Фильтр персистентности объясняет, почему существует математическая структура и почему определенные типы структуры повторяются, но постоянная тонкой структуры, масса электрона, сила гравитации — эти числа остаются случайными, необъяснимыми величинами. Задаются ли они каким-то более глубоким принципом, выбранным из множества возможностей, или же это просто грубые факты, фильтр персистентности не дает ответа.

Мы не знаем, является ли континуальная структура пространства-времени — гладкость, делающая применимым дифференциальное и интегральное исчисление, — особенностью реальности или особенностью нашего когнитивного аппарата. Фильтр персистентности отбирает системы на топологических пространствах для непрерывной эволюции, но сама топологическая структура может быть обусловлена работой разума. Это вопрос, который формулируется, но не решается методом разложения по двум источникам.

Мы не знаем, смогут ли искусственные разумы — с когнитивной архитектурой, радикально отличающейся от нашей — разработать ту же самую математику. Если теория двойного разложения верна, они должны обнаружить те же законы сохранения и группы симметрии (содержательная составляющая), но могут выразить их на другом формальном языке (формальная составляющая). Это проверяемое предсказание, и быстрое развитие искусственного интеллекта позволит проверить его при нашей жизни.

И мы не знаем, является ли фильтр персистентности самым глубоким уровнем объяснения, или же он основывается на чем-то еще более глубоком. Возможно, есть причина, по которой персистентность отбирает математическую структуру — причина, коренящаяся в теории информации, вычислениях или логике самореференции. Возможно, фильтр является следствием чего-то, чего мы еще не могли себе представить.

Эти открытые вопросы не являются недостатками тезиса. Они — его расширенные границы. Хороший ответ на глубокий вопрос не закрывает исследование; он расширяет его, выявляя новые вопросы, которые ранее невозможно было сформулировать. Фильтр персистентности превращает загадку Вигнера из смутного чувства тайны в точную исследовательскую программу : измерить персистентность, охарактеризовать инвариантные алгебры, предсказать, где математика преуспеет, а где нет, проверить предсказания на основе данных.

Есть еще один момент, который, пожалуй, самый важный.

Эффективность математики необоснованна только в том случае, если исходить из предположения, что математика и физический мир принципиально разделены — что один абстрактный, а другой конкретный, что один ментальный, а другой материальный, что связь между ними требует особого объяснения. Фильтр персистентности предполагает, что это разделение — иллюзия. Математическая структура — это не нечто, навязанное миру извне. Это подпись самого существования — знак , который должно нести всё , чтобы существовать достаточно долго, чтобы быть познанным.

В конечном итоге мы не открываем таинственную гармонию между разумом и космосом. Мы открываем, что космос, чтобы быть космосом — чтобы содержать структуры, которые сохраняются, сохраняют свою идентичность, могут быть объектами познания, — должен быть чем-то, что может описать математика. Невероятная эффективность математики с этой точки зрения не является ни неразумной, ни удивительной. Это неизбежное следствие вселенной, в которой существует нечто, а не ничто.

Полный формальный аргумент со всеми его определениями, теоремами и доказательствами представлен в научной статье, включенной в качестве приложения в конце этого тома. Читатели, желающие увидеть суть этого повествования, могут обратиться к нему. Но история, рассказанная на этих страницах, не является упрощением формального аргумента. Это тот же самый аргумент, рассказанный на другом языке — языке слов, а не символов, метафор, а не уравнений. Оба языка необходимы, потому что истина, которую они выражают, слишком обширна для одного из них.

Фильтр всё ещё работает. Вселенная всё ещё отбирает структуры. И где-то в пространстве всех возможных конфигураций вещи, которые выдержат испытание временем, уже несут на себе математическую сигнатуру, которая сделает их познаваемыми — не потому, что кто-то задумал их как познаваемые, а потому, что выносливость и познаваемость на самом глубоком уровне — одно и то же.

Глоссарий терминов

Действие. Единое число, суммирующее всю траекторию физической системы. Природа выбирает траекторию, для которой это число остается стационарным — не увеличиваясь и не уменьшаясь при небольших изменениях.

Алгебра — это совокупность элементов, которые можно складывать, вычитать и умножать, при этом результаты этих операций всегда остаются в пределах данной совокупности.

Угловой момент — сохраняющаяся величина, связанная с вращательным движением. Вращающийся волчок, планета, вращающаяся вокруг своей оси, и электрон в атоме — все они обладают угловым моментом.

Антиматерия — это форма материи, в которой каждая частица имеет противоположный заряд по сравнению со своим обычным аналогом. Позитрон — это антиматериальный двойник электрона.

Приближенный инвариант — это величина, которая не изменяется точно, а остается в пределах допустимого диапазона в течение определенного периода времени. Биологические инварианты, как правило, являются приближенными.

Аттрактор — это совокупность состояний, к которым стремится диссипативная система в процессе эволюции.

Известным примером является аттрактор Лоренца, имеющий форму бабочки.

Аксиома — это основополагающее утверждение, считающееся истинным, из которого выводятся другие истины. Аксиомы теории определяют её логическую отправную точку.

Бифуркация — качественное изменение поведения динамической системы, когда параметр пересекает критическое значение, например, внезапное замерзание воды при нулевой температуре.

Математический анализ — раздел математики, изучающий непрерывные изменения, независимо друг от друга изобретенный Ньютоном и Лейбницем в XVII веке.

Клеточная автоматизация — это сетка клеток, которая эволюционирует дискретными временными шагами в соответствии с простыми правилами, касающимися соседних клеток. Наиболее известным примером является игра «Жизнь» Конвея.

Заряд — это сохраняющаяся величина, определяющая реакцию частицы на силу. Электрический заряд определяет реакцию на электромагнитные поля.

Коммутативная алгебра — это алгебра, в которой порядок умножения не имеет значения: умножение A на B дает тот же результат, что и умножение B на A.

Комплексное число — это число, содержащее квадратный корень из минус единицы. Несмотря на кажущуюся искусственность, комплексные числа играют важную роль в математической структуре квантовой механики.

Закон об охране природы А Утверждение о том, что некоторая величина не изменяется со временем, независимо от обстоятельств. Закон сохранения энергии означает, что полная энергия изолированной системы никогда не изменяется.

Непрерывность — свойство плавного изменения без скачков. Непрерывная функция проходит через каждое промежуточное значение между своей начальной и конечной точками.

Конвенционализм — это философская точка зрения, согласно которой математическая структура физики отчасти является результатом того, как мы выбираем строить свои теории.

Система координат — это способ присвоения числовых значений точкам в пространстве, подобно широте и долготе на карте. Выбор координат является общепринятым; геометрия — нет.

Критическая точка — это точка, где скорость изменения функции равна нулю — пик, впадина или седловая точка. В физике устойчивые траектории находятся в критических точках действия.

Кривизна — мера того, насколько поверхность или пространство отклоняются от плоскости. Гравитация, согласно теории Эйнштейна, — это кривизна пространства-времени.

Градиент глубины . Наблюдение, согласно которому точность математических вычислений снижается по мере перехода от фундаментальной физики через биологию к социальным наукам, отражая степень устойчивости.

Дифференциальное уравнение — это уравнение, связывающее величину со скоростью её изменения. Большинство законов физики выражаются в виде дифференциальных уравнений.

Дифференцируемость — свойство иметь четко определенную скорость изменения в каждой точке. Дифференцируемые функции более гладкие, чем просто непрерывные.

Диссипативная система — это система, которая теряет энергию в окружающую среду за счет трения, вязкости или теплового потока. Большинство повседневных систем являются диссипативными.

Двойственное разложение источников. Тезис о том, что математическая физика имеет два источника:

формальный компонент, вносимый разумом, и содержательный компонент, вносимый окружающим миром.

Динамическая система. Любая система, которая эволюционирует с течением времени в соответствии с определенным правилом. Планеты, вращающиеся вокруг звезды, растущее население и активация нейронов — все это динамические системы.

Собственное значение — это особое значение, связанное с преобразованием, которое показывает, насколько что-либо растянуто или сжато в определенном направлении.

Электромагнетизм — сила, ответственная за свет, электричество, магнетизм и структуру атомов. Описывается уравнениями Максвелла.

Энергия — сохраняющаяся величина, связанная с симметрией относительно сдвига во времени. Полная энергия изолированной системы не изменяется.

Энтропия — мера беспорядка или неопределенности. Второй закон термодинамики гласит, что энтропия изолированной системы имеет тенденцию к увеличению.

Эпистемический структурный реализм — это философская точка зрения, согласно которой всё, что мы можем знать о мире, — это его математическая структура; мы не можем знать природу того, что лежит в его основе.

Равновесие — это состояние, в котором система не изменяется со временем. Шар на дне чаши находится в устойчивом равновесии.

Уравнение Эйлера-Лагранжа — это уравнение, которому должна удовлетворять любая траектория, чтобы быть стационарной точкой действия. Оно является математической основой вариационного принципа.

Эволюция. В биологии — процесс, посредством которого естественный отбор формирует организмы на протяжении поколений. В математике — изменение состояния системы с течением времени.

Фальсифицируемость — свойство утверждения, позволяющее, по крайней мере в принципе, доказать его ошибочность. Утверждение, которое нельзя проверить, не может быть научным.

Обратная связь — это механизм, при котором выходной сигнал системы влияет на её собственный входной сигнал. Отрицательная обратная связь — стабилизирующий ; положительная обратная связь — усиливающий.

Конечная аксиоматируемость Свойство теории, которая может быть полностью описана конечным числом аксиом. Инвариантная алгебра персистентных систем является конечно аксиоматизируемой .

Теория первого порядка — формальный язык для формулирования утверждений о математических структурах с использованием переменных, кванторов (для всех существует) и логических связок.

Формальная теория — это система аксиом и правил вывода, определяющая класс математических структур. Каждая алгебра является моделью некоторой формальной теории.

Фрактальная размерность — мера сложности геометрического объекта, способного принимать нецелые значения. Аттрактор Лоренца имеет фрактальную размерность около 2,05.

Функтор — это отображение между категориями, сохраняющее структуру. Фильтр персистентности можно описать как функтор, преобразующий персистентные системы в формальные теории.

Галилеева инвариантность — принцип , согласно которому законы физики одинаковы для всех наблюдателей, движущихся с постоянной скоростью относительно друг друга.

Калибровочная симметрия — это внутренняя симметрия физической теории, не соответствующая преобразованию пространства или времени. Стандартная модель построена на калибровочных симметриях.

Общая теория относительности. Теория гравитации Эйнштейна , описывающая гравитацию как искривление пространства-времени, вызванное массой и энергией.

Планер — небольшая фигура в игре «Жизнь» Конвея, которая перемещается по диагонали сетки, возвращаясь к своей первоначальной форме каждые четыре шага.

Группа А — математическая структура, состоящая из множества элементов и операции, которая объединяет любые два элемента для получения третьего, удовлетворяющего определенным правилам.

Теория групп — математическое исследование симметрии. Любая симметрия — кристалла, физического закона или уравнения — может быть описана как группа.

Гамильтониан — математическая функция, которая кодирует полную энергию физической системы и описывает её временную эволюцию в классической и квантовой механике.

Теорема Гильберта о базисе. Математическая теорема, доказанная Давидом Гильбертом, утверждающая, что каждый полиномиальный идеал является конечно порожденным. Она гарантирует, что инвариантные алгебры могут быть описаны конечным числом.

Гильбертово пространство — бесконечномерное обобщение обычного пространства, снабженное понятиями угла и расстояния. Математическая область квантовой механики.

Гомеостаз — поддержание стабильных внутренних условий в живом организме, таких как температура тела или уровень сахара в крови, посредством механизмов обратной связи.

Гомоморфизм — это отображение между двумя математическими структурами, сохраняющее операции. Если отображение сохраняет сложение в первой структуре, оно сохраняет сложение и во второй.

Идеал. В алгебре это особое подмножество кольца, которое поглощает умножение. Полиномиальные соотношения между сохраняющимися величинами образуют идеал.

Теорема о неполноте — доказательство Гёделя , согласно которому любая достаточно богатая математическая система содержит истинные утверждения, которые невозможно доказать внутри этой системы.

Инфляционная космология — это теория, согласно которой в самой ранней Вселенной наблюдался короткий период экспоненциального расширения, сгладивший неровности и создавший наблюдаемую нами крупномасштабную однородность.

Теория информации — это математическое исследование количественной оценки , хранения и передачи информации, основанное Клодом Шенноном в 1948 году.

Инвариант — любая величина, свойство или отношение, которые не изменяются при заданном преобразовании. Инварианты — это отпечатки пальцев устойчивости.

Инвариантная алгебра — это алгебра , образованная всеми инвариантными величинами системы и замкнутая относительно сложения и умножения. Она кодирует устойчивую структуру системы.

Изоморфизм — это отображение между двумя структурами, которое является абсолютно точным в обоих направлениях — оно сохраняет всю структуру и может быть обращено.

Кант, Иммануил, философ XVIII века, утверждавший, что пространство, время и причинность являются формами интуиции, порожденными разумом, а не свойствами мира.

лагранжевый Математическая функция, равная разности кинетической и потенциальной энергии системы. Отправная точка для вариационной формулировки механики.

Группа Ли — группа симметрий, плавно изменяющихся, названная в честь норвежского математика Софуса Ли. Группа вращений — это группа Ли.

Группа Лоренца — группа симметрий специальной теории относительности — преобразования, сохраняющие скорость света.

Показатель Ляпунова — число , измеряющее скорость расходимости близлежащих траекторий в динамической системе. Положительный показатель Ляпунова указывает на хаос.

Концепция отображения : философская концепция, анализирующая применение математики с точки зрения сохраняющих структуру отображений между математической и физической областями.

Гипотеза математической вселенной : предположение Макса Тегмарка о том, что физическая вселенная не просто описывается математикой, а представляет собой математическую структуру.

Принцип максимальной энтропии. Принцип , согласно которому при отсутствии дополнительной информации наиболее вероятным состоянием системы является то, которое обладает наибольшей энтропией.

В математической логике **модель** — это конкретная структура, удовлетворяющая аксиомам формальной теории. Инвариантная алгебра персистентной системы является моделью её теории.

Импульс — сохраняющаяся величина, связанная с пространственно-трансляционной симметрией. Полный импульс изолированной системы не изменяется.

Множественная реализуемость Свойство математической структуры, которое может быть реализовано во многих различных физических системах. Одна и та же алгебра может описывать разные частицы.

Естественный отбор — это процесс, благодаря которому организмы с полезными признаками выживают и размножаются более успешно. Аналогия с фильтром устойчивости.

Заряды Нётер — это конкретная сохраняющаяся величина, связанная с непрерывной симметрией согласно теореме Нётер. Энергия — это заряд Нётер, обладающий симметрией относительно сдвига во времени.

Теорема Нётер — доказательство Эмми Нётер 1918 года, согласно которому каждая непрерывная симметрия физической системы соответствует сохраняющейся величине, и наоборот.

Ноуменальный мир. В философии Канта это мир как таковой, независимый от нашего восприятия. Непознаваемый посредством прямого наблюдения.

Наблюдаемая величина — любая величина, которую в принципе можно измерить. В квантовой механике наблюдаемые величины представляются самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве.

Онтический структурный реализм — это философская точка зрения, согласно которой мир в своей основе состоит из структур и отношений, а не из объектов, которые эти отношения поддерживают.

Орбита. В динамических системах — последовательность состояний, которые система посещает во времени. В теории групп — множество точек, достижимых из данной точки с помощью преобразований группы.

Частичный изоморфизм — это отображение, сохраняющее часть, но не всю структуру между двумя математическими объектами. Используется в рамках концепции частичных структур .

Устойчивость — это сохранение структурной идентичности в процессе изменений. Система устойчива, когда некоторые из её свойств остаются стабильными с течением времени.

Тезис о фильтре персистентности. Центральное утверждение этой книги: математика описывает мир, потому что во времени сохраняются только конфигурации с достаточной инвариантной структурой.

Фазовое пространство — это пространство всех возможных состояний физической системы. Каждая точка в фазовом пространстве представляет собой полное описание системы в один конкретный момент времени.

Фазовый переход — внезапное качественное изменение в поведении системы , например, замерзание воды или потеря магнитом своих магнетических свойств.

Платонизм — это философская точка зрения, согласно которой математические объекты существуют независимо от человеческого разума, в абстрактной сфере чистых форм.

Многочлен — это выражение, содержащее переменные, возведенные в целые степени, объединенные сложением и умножением. Ограничения между сохраняющимися величинами являются многочленными.

Позитрон — антиматериальный двойник электрона, предсказанный уравнением Дирака в 1928 году и экспериментально обнаруженный в 1932 году.

Принцип наименьшего действия. Принцип , согласно которому траектория физической системы — это та, которая обеспечивает стационарность действия. Эквивалентен законам Ньютона для классических систем.

Вероятность — мера того, насколько вероятно наступление события, варьирующаяся от нуля (невозможно) до единицы (точно).

Квантовая механика — это физическая теория, описывающая поведение материи и энергии на атомном и субатомном уровнях, характеризующаяся волново-частичным дуализмом и вероятностными предсказаниями.

Квантовое число — дискретное значение, обозначающее состояние квантовой системы. Сохранение квантовых чисел является формой инвариантности.

Редуктивная группа — это тип группы симметрии, для которой, согласно теореме Гильберта-Нагаты, инвариантная алгебра гарантированно является конечно порожденной.

Ренормализация Математический метод устранения бесконечностей из вычислений в квантовой теории поля, позволяющий получать конечные, проверяемые предсказания.

Представление — это способ реализации абстрактной группы в виде группы матриц или преобразований, действующих на векторное пространство.

Риманова геометрия — математика искривленных пространств в любом количестве измерений, разработанная Бернхардом Риманом в 1854 году и использованная Эйнштейном для общей теории относительности.

Самосопряженный оператор — математический объект в квантовой механике, представляющий наблюдаемую величину. Гарантируется, что его собственные значения являются действительными числами.

Самоорганизация Самопроизвольное возникновение порядка в системе без внешнего воздействия. Многие устойчивые системы являются самоорганизующимися .

В гомеостазе **заданное значение** — это целевая величина, вокруг которой поддерживается регулируемая величина. Температура тела в тридцать семь градусов является гомеостатической заданной точкой.

Специальная теория относительности — теория Эйнштейна 1905 года, основанная на двух принципах: законы физики одинаковы для всех инерциальных наблюдателей, и скорость света постоянна.

Проблема специфичности . Вопрос о том, почему те или иные математические структуры — группы Ли, гильбертовы пространства, вариационные принципы — встречаются в физике.

Стандартная модель — это квантовая теория поля, описывающая электромагнитные, слабые и сильные ядерные взаимодействия, а также известные элементарные частицы.

Стационарность — это состояние функции в точке, где скорость её изменения равна нулю. В физике устойчивые траектории — это стационарные точки действия.

Теорема Стоуна — математический результат, доказывающий, что каждая непрерывная однопараметрическая унитарная группа в гильбертовом пространстве порождается самосопряженным оператором.

Структурный реализм — это философская позиция, согласно которой математическая структура наших лучших теорий отражает подлинную структуру мира.

Структурное богатство — свойство математической теории, которая является конечно аксиоматизируемой , имеет нетривиальные следствия и может быть многократно реализована .

Симметрия — это преобразование, которое не изменяет ничего. Вращение сферы является симметрией, потому что после вращения сфера выглядит так же, как и до вращения.

Нарушение симметрии — это процесс, при котором симметрия системы уменьшается, например, при охлаждении воды образуются кристаллы льда, которые выделяют определенные направления .

Группа симметрии — совокупность всех преобразований симметрии системы, снабженная операцией композиции. Фундаментальное понятие в современной физике.

Топологическое пространство — математическое пространство, в котором определено понятие близости, позволяющее использовать понятия непрерывности и сходимости.

Траектория — это путь, который система прослеживает в своем пространстве состояний по мере своего развития во времени.

Унитарный перевод — это преобразование, сохраняющее скалярные произведения — углы и расстояния — в гильбертовом пространстве. Временная эволюция в квантовой механике является унитарной.

Вариационный принцип — это принцип , согласно которому истинная эволюция системы — это та, которая делает некоторую функциональную составляющую (обычно действие) стационарной.

Многообразие. В алгебраической геометрии многообразие — это множество всех точек, удовлетворяющих набору полиномиальных уравнений. Совместные значения сохраняющихся величин лежат на многообразии.

Множество жизнеспособности — это область пространства состояний, в пределах которой система удовлетворяет условиям сохранения работоспособности. За пределами этого множества система перестаёт функционировать.

Волновая функция — математический объект, описывающий квантовое состояние системы. Это комплексная функция, квадрат которой дает вероятности.

Загадка Вигнера. Вопрос Юджина Вигнера 1960 года: почему математика настолько необоснованно эффективна в описании физического мира?

Теорема Вигнера. Доказательство того, что любое преобразование, сохраняющее вероятности квантовых переходов, должно быть либо унитарным, либо антиунитарным.

Хронология: от Пифагора до фильтра персистентности.

Около 530 г. до н.э. Пифагор и его школа выдвинули тезис о том, что мир по своей сути математический — что число является сущностью всего сущего. Это первое явное утверждение о глубокой связи между математикой и физической реальностью.

Около 387 г. до н.э. Платон основал Академию в Афинах. Его теория форм постулирует вечное, неизменное царство математических объектов, которое физический мир несовершенно отражает — это самая ранняя философская основа математического платонизма.

Примерно в 300 году до н.э. Евклид составляет «Начала», систематизируя геометрию как дедуктивную структуру, построенную на аксиомах. В течение двух тысячелетий евклидова геометрия служила как моделью математической строгости , так и предполагаемой геометрией физического пространства.

ок. 250 г. до н.э. Архимед Разрабатывает математические методы для вычисления площадей, объемов и центров тяжести, являясь пионером в применении абстрактной математики к физическим задачам.

В 1543 году Коперник публикует трактат «О вращении», в котором предлагает гелиоцентрическую модель Солнечной системы. Успех математической модели бросает вызов аристотелевской традиции и знаменует собой начало математизации натурфилософии.

В 1609–1619 годах Кеплер открыл три закона движения планет, показав, что орбиты планет представляют собой эллипсы с Солнцем в одном из фокусов. Кеплер ясно дал понять, что открывает математический порядок, заложенный в космосе.

В 1638 году Галилей публикует «Рассуждения и математические доказательства», в которых заявляет, что книга природы написана на языке математики — одно из наиболее влиятельных утверждений математического реализма.

В 1687 году Ньютон публикует «Начала математики», объединяя земную и небесную механику в рамках единой математической модели. Закон всемирного тяготения демонстрирует, что одна и та же математика управляет падающими яблоками и движением планет по орбитам.

1788 год: Лагранж публикует «Механику». Аналитический подход , переформулирующий ньютоновскую механику в терминах принципа наименьшего действия. Вариационная формулировка окажется фундаментальной для всей последующей физики.

В 1830–1832 годах Эварист Галуа разработал теорию групп, связав разрешимость полиномиальных уравнений с их свойствами симметрии. Теория групп впоследствии станет основополагающим языком физики элементарных частиц.

В 1854 году Бернхард Риман читает свою хабилитационную лекцию «О гипотезах, лежащих в основе геометрии», обобщая геометрию на искривленные пространства любой размерности. Шестьдесят лет спустя Эйнштейну понадобится именно эта математика для общей теории относительности.

В 1865 году Джеймс Клерк Максвелл опубликовал свои уравнения электромагнетизма, объединив электричество, магнетизм и свет в единую математическую модель. Эти уравнения предсказывают электромагнитные волны ещё до того, как они будут обнаружены экспериментально.

В 1894 году Генрих Герц опубликовал работу « Принципы механики», в которой отметил, что математические модели, по-видимому, имеют «последствия, которые, в свою очередь, являются образами естественных последствий» — ранняя формулировка загадки математической эффективности.

В 1902 году Анри Пуанкаре публикует работу «Наука и гипосфера» , в которой утверждает, что выбор математической модели в физике включает в себя условные элементы, не продиктованные природой.

В 1905 году Эйнштейн опубликовал специальную теорию относительности, показав, что геометрия пространства-времени не евклидова, а минковскианская . Группа Лоренца заменила галилееву группу в качестве симметрии физики.

В 1915 году Эйнштейн опубликовал общую теорию относительности, отождествив гравитацию с искривлением пространства-времени, описываемым римановой геометрией — геометрией, которую Риман разработал в качестве чисто математического упражнения шестьдесят лет назад.

В 1918 году Эмми Нётер доказала свою теорему, связывающую непрерывные симметрии с законами сохранения. Теорема устанавливает самую глубокую из известных связей между математическим понятием симметрии и физическим понятием сохранения.

В 1928 году Поль Дирак открыл релятивистское волновое уравнение для электрона. Математическая структура уравнения предсказывает существование позитрона — что было экспериментально подтверждено в 1932 году — демонстрируя предсказательную силу математического формализма.

В 1930 году Курт Гёдель доказал теорему о полноте, показав, что каждая непротиворечивая теория первого порядка имеет свою модель. Этот результат лежит в основе утверждения тезиса о фильтре персистентности о том, что инвариантные алгебры являются моделями формальных теорий.

В 1931 году Гёдель доказал теоремы о неполноте, показав, что любая достаточно богатая математическая система содержит истинные, но недоказуемые утверждения, что выявило фундаментальные ограничения формализации .

В 1931 году Юджин Вигнер доказал свою теорему о преобразованиях симметрии в квантовой механике: любое преобразование, сохраняющее вероятности перехода, должно быть унитарным или антиунитарным. Этот результат впоследствии станет центральным для вывода структуры гильбертова пространства квантовой теории из условий персистентности.

В 1935 году Эйнштейн , Подольский и Розен опубликовали парадокс ЭПР, подчеркнув противоречие между квантовой механикой и классическими представлениями о реальности — противоречие , которое повлияет на дискуссии о когнитивных и эмпирических истоках математической структуры.

В 1943 году Маршалл Стоун доказал свою теорему об однопараметрических унитарных группах, показав, что любая такая группа порождается самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве. В сочетании с теоремой Вигнера это устанавливает математическую необходимость гамильтоновой структуры.

В 1960 году Юджин Вигнер публикует работу «Необоснованная эффективность математики в естественных науках», в которой задаёт вопрос, ставший мотивацией для этой книги. Он называет соответствие между математикой и физикой «даром, который мы не понимаем и которого не заслуживаем».

В 1967 году Стивен Вайнберг и Абдус Салам независимо друг от друга предложили электрослабую теорию, объединившую электромагнитные и слабые ядерные силы с использованием калибровочной симметрии. Теория предсказывает существование W- и Z-бозонов, что было подтверждено в 1983 году.

В 1980 году Ричард Хэмминг опубликовал работу «Необоснованная эффективность математики», в которой предложил четыре частичных объяснения: предвзятость отбора, приспособленность, ограниченная область применения и эволюция. Он признает, что ни одно из них не является полностью удовлетворительным.

В 1989 году Джон Уорралл вводит структурный реализм, утверждая, что в ходе теоретических изменений сохраняется математическая структура, а не онтологическая приверженность. Это становится наиболее влиятельной философской концепцией для понимания научного прогресса в структурном плане.

В 1995–2007 годах Джеймс Лэдиман, Стивен Френч и другие развивали онтический структурный реализм: точку зрения, согласно которой структура — это всё, что существует, — что мир состоит из отношений, а не из вещей, несущих эти отношения.

В 1998 году Марк Штайнер опубликовал работу «Применимость математики как философская проблема», в которой различает семантическую, описательную и эвристическую применимость — трехчастную структуру, определяющую дальнейшие дискуссии.

В 2006 году конвенционализм Пьера Дюэма и натуралистический подход Пенелопы Мэдди оказали влияние на концепцию отображения математической применимости, которая анализирует успех математики с точки зрения отображений, сохраняющих структуру.

Макс **2008 года** Тегмарк публикует работу «Математическая Вселенная», в которой выдвигается предположение, что внешняя физическая реальность представляет собой математическую структуру и что каждая непротиворечивая математическая структура физически реальна — это наиболее радикальный ответ на загадку Вигнера.

В период с 2011 по 2018 год Отавио Буэно, Марк Коливане, Стивен Френч и Кристофер Пинкок разработали умозаключительные и картографические модели математической применимости, предоставив наиболее технически сложную основу для понимания того, как математика применяется к физическому миру.

2013 Маркус Мюллер и Луис Масанес выводит структуру гильбертова пространства квантовой механики из постулатов теории информации, демонстрируя, что конкретная математическая основа квантовой теории может быть выведена из абстрактных принципов обработки информации.

2015 Кьяра Марлетто и Дэвид Дойч предлагают теорию конструкторов, заменяя динамические законы утверждениями о возможных и невозможных преобразованиях, — предоставляя альтернативную формализацию персистентности, независимую от лагранжевой структуры.

В 2019 году Сэм Грейданус и его коллеги продемонстрировали гамильтоновские нейронные сети — искусственные системы, которые обнаруживают закон сохранения энергии на основе исходных физических данных, предоставив ранние доказательства предсказания теории разложения по двум источникам о том, что системы ИИ должны обнаруживать те же сохраняющиеся величины, что и люди в физике.

В 2020 году Сильвиу -Мариан Удреску и Макс Тегмарк разработали AI Feynman, систему символической регрессии, которая выявляет физические законы на основе данных — еще одно доказательство того, что содержание физики не зависит от когнитивной архитектуры первооткрывателя.

В 2026 году Борис Кригер публикует книгу «Почему работает математика: структурная необходимость изоморфизма между формальными системами и физической реальностью », в которой излагает тезис о фильтре персистентности: математика описывает мир, потому что персистентность требует инвариантов, инварианты образуют алгебры, а алгебры являются моделями формальных теорий. Формальный аргумент, подкрепленный примерами, контраргументами и фальсифицируемыми предсказаниями, предлагает новое решение загадки Вигнера и служит основой для данной книги.